

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי א



תוכן העניינים

1.	מבוא לאלגברה.....	1
2.	משוואות אלגבריות.....	47
3.	אי שוויונים אלגבריים.....	69
4.	חוקי החזקות והשורשים.....	85
5.	משוואות ואי-שוויונים מעריכיים.....	95
6.	חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים.....	105
7.	טריגונומטריה במשולש ישר זווית.....	121
8.	זהויות טריגונומטריות.....	126
9.	משוואות טריגונומטריות.....	147
10.	חשבון דיפרנציאלי - הפונקציה הממשית (ללא ספר)	168
11.	חשבון דיפרנציאלי - גבול של פונקציה.....	177
12.	חשבון דיפרנציאלי - רציפות של פונקציה.....	183
13.	חשבון דיפרנציאלי - הגדרת הנגזרת, גזירות של פונקציה ונגזרות חד-צדדיות.....	195
14.	חשבון דיפרנציאלי - נגזרת של פונקציה.....	208
15.	חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים - חזרה.....	223
16.	חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקציות טריגונומטריות - חזרה.....	241
17.	חשבון דיפרנציאלי - פונקציות מעריכיות - חזרה.....	257
18.	חשבון דיפרנציאלי - פונקציות לוגריתמיות - חזרה.....	

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי א

פרק 1 - מבוא לאלגברה

תוכן העניינים

1.	מספרים מכוונים	1
2.	חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים	5
3.	סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים	7
4.	שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים	8
5.	כפל וחילוק שברים	14
6.	חיבור וחסור שברים	16
7.	בעיות יסודיות באחוזים	20
8.	חזרה על תבניות מספר	22
9.	כינוס איברים	24
10.	פישוט ביטויים על ידי פתיחת סוגריים	26
11.	פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר	28
12.	פירוק לגורמים של ביטויים אלגברים	30
13.	פירוק הטרינום	33
14.	שברים אלגברים	35
15.	כפל וחילוק של שברים אלגברים	39
16.	חיבור וחסור של שברים אלגברים	41
17.	שברים כפולים	45

מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

מספרים מכוונים הם מספרים שיכולים לקבל סימן חיובי או שלילי, כגון:

- בקניון גדול ישנן קומות 1, 2, 3, 4, וכן חניונים הממוקמים בקומות 1-, 2-, ו-3-.
- גובה פני הים מוגדר להיות 0 מטרים. העיר חיפה נמצאת כ-103 מטרים מעל פני הים בעוד שים המלח נמצא בגובה 426- מטרים.

כללים:

- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים זהים, מחברים את המספרים עצמם והסימן נשאר.
- כאשר מחברים שני מספרים בעלי סימנים מנוגדים, מחסירים את המספרים זה מזה (הקטן מהגדול) וסימן התוצאה כסימן המספר הגדול מביניהם.
- כפל וחילוק יתבצע בשני חלקים:
 - ביצוע הפעולה על המספרים עצמם.
 - קביעת הסימן של התוצאה באופן הבא:
 - כפל או חילוק של שני מספרים בעלי אותו סימן - התוצאה תהיה חיובית.
 - כפל או חילוק של שני מספרים שונים סימן - התוצאה תהיה שלילית.

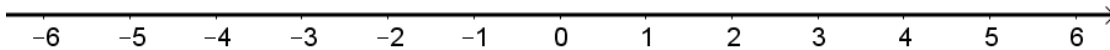
הערה:

אם יש רצף של מכפלות (או חילוקים), סימן התוצאה תלוי במספר הפעמים שבהם מופיע סימן שלילי (-). אם הסימן מופיע מספר זוגי של פעמים התוצאה חיובית, ואם הוא מופיע מספר אי-זוגי של פעמים אזי התוצאה שלילית.

שאלות:

(1) סמנו את המספרים הבאים על ציר המספרים בהתאמה:

$$-3\frac{1}{2}, 4, 1\frac{1}{3}, -5, -\frac{1}{2}, 2, 0, \frac{1}{2}, -2$$



(2) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

ב. $-3-2$

א. $3+2$

ד. $-3+2$

ג. $3-2$

ו. $7+10$

ה. $-1-4$

ח. $-7+3$

ז. $-6+5$

(3) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

ב. $5-8-12+17$

א. $5+7-23+1$

ד. $-4-11+2+9$

ג. $3-14+2+6$

ו. $-7-13+5-3$

ה. $6-21+3-7$

(4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

ב. $4 \cdot (-7)$

א. $4 \cdot 9$

ד. $(-5) \cdot (-3)$

ג. $(-6) \cdot (-5)$

ו. $(-8) \cdot 5$

ה. $(-2) \cdot 8$

ח. $2 \cdot 3 \cdot 3$

ז. $(-2) \cdot (-3) \cdot (-3)$

י. $(-2) \cdot (-3) \cdot 3$

ט. $(-2) \cdot 3 \cdot (-3)$

יב. $(-2) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-2)$

יא. $2 \cdot 3 \cdot (-3)$

יד. $1 \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot 2$

יג. $(-1) \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot 2$

5) מהו הסימן של תוצאת המכפלה בכל מקרה :

א. $(-2) \cdot (-4) \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot (-6) \cdot (-5)$

ב. $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot 6 \cdot (-5)$

ג. $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot (-6) \cdot (-5)$

ד. $(-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot 6 \cdot 5$

6) חשבו את ערכי הביטויים הבאים :

א. $(-5) : (-25)$

ב. $3 : (-30)$

ג. $(-10) : 40$

ד. $(-4) : (-32)$

ה. $18 : (-6)$

ו. $4 : (-16)$

7) חשבו את ערכי הביטויים הבאים :

א. $\frac{-60}{12}$

ב. $\frac{42}{-6}$

ג. $\frac{32}{-4}$

ד. $\frac{-12}{-3}$

8) מה התוצאה של כל אחת מהפעולות הבאות :

א. $0 : 5$

ב. $(-2) \cdot 0$

ג. $0 \cdot (-3) \cdot 4$

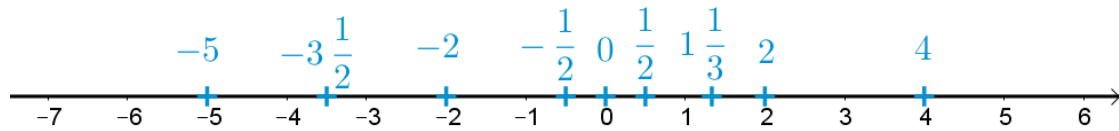
ד. $6 : 0$

ה. $0 + 4$

ו. $0 - 4$

תשובות סופיות:

(1) להלן מערכת הצירים:



	ה. -5	ד. -1	ג. 1	ב. -5	א. 5 (2)
			ח. -4	ז. -1	ו. 17
ו. -18	ה. -19	ד. -4	ג. -3	ב. 2	א. -10 (3)
	ה. -16	ד. 15	ג. 30	ב. -28	א. 36 (4)
	י. 18	ט. 18	ח. 18	ז. -18	ו. -40
		יד. 16	יג. -16	יב. 36	יא. -18
		ד. -	ג. -	ב. +	א. + (5)
ו. $-\frac{1}{4}$	ה. $-\frac{1}{3}$	ד. 8	ג. -4	ב. -10	א. 5 (6)
		ד. 4	ג. -8	ב. -7	א. -5 (7)
ו. -4	ה. 4	ד. לא מוגדר	ג. 0	ב. 0	א. 0 (8)

חזקות ושורשים עם מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

הגדרה:

פעולת החזקה היא צורה מקוצרת שמייצגת פעולת כפל של אותו מספר בעצמו מספר פעמים. סימון החזקה הוא באופן הבא:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

כאשר a נקרא הבסיס ו- n נקראת החזקה.

הערות:

- כאשר הבסיס חיובי, התוצאה תמיד תהיה חיובית ללא קשר האם החזקה היא זוגית או אי-זוגית.
- כאשר הבסיס שלילי, התוצאה תהיה חיובית אם החזקה היא זוגית ושלילית אם החזקה היא אי-זוגית.

הגדרה:

פעולת השורש היא הפוכה לפעולת החזקה והיא מאפשרת למצוא את בסיס החזקה. סימון השורש הוא באופן הבא:

$$\sqrt[n]{a}$$

כאשר a נקרא הבסיס ו- n נקרא סדר השורש.

הערות:

- שורש למספר חיובי יכול להיות מסדר זוגי או אי-זוגי.
- שורש למספר שלילי יכול להיות מסדר אי-זוגי בלבד.

שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- | | |
|--------------|---------------|
| א. 3^2 | ב. 3^3 |
| ג. $(-3)^3$ | ד. $(-2)^3$ |
| ה. 4^3 | ו. 3^4 |
| ז. $(-5)^3$ | ח. 10^4 |
| ט. $-(-3)^4$ | י. -5^4 |
| יא. -4^3 | יב. $-(-2)^6$ |

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- | | |
|--------------------|----------------------|
| א. $\sqrt[3]{-27}$ | ב. $\sqrt[4]{625}$ |
| ג. $\sqrt[4]{-16}$ | ד. $\sqrt[5]{-32}$ |
| ה. $-\sqrt[4]{81}$ | ו. $-\sqrt[3]{1000}$ |

תשובות סופיות:

- | | | | | | |
|-----------|----------|-------------|---------|---------|---------|
| (1) א. 9 | ב. 27 | ג. -27 | ד. -8 | ה. 64 | ו. 81 |
| ז. -125 | ח. 10000 | ט. -81 | י. -625 | יא. -64 | יב. -64 |
| (2) א. -3 | ב. 5 | ג. לא מוגדר | ד. -2 | ה. -3 | ו. -10 |

סדר פעולות חשבון עם מספרים מכוונים:

סיכום כללי:

סדר פעולות חשבון:

- פעולות כפל וחילוק קודמות לפעולות חיבור וחיסור.
- פעולות חזקה ושורש קודמות לפעולות כפל וחילוק.
- סוגריים קודמים לכל.

שאלות:

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

$$\begin{array}{ll}
 \sqrt{81} + 3 \cdot 2^3 - 40 : 8 & \text{(1)} \\
 (-3)^2 : 9 - 2 \cdot (-4^2) & \text{(2)} \\
 \sqrt{144} - 20 : 4 + 3 \cdot (-2)^2 & \text{(3)} \\
 3 + 4 \cdot [-3 + 4 \cdot (-2)] + \sqrt{10 + 6} & \text{(4)} \\
 (-3)^4 : (-9) - 5 \cdot (-2)^3 & \text{(5)} \\
 -\sqrt{9} + 5^2 : (-4 - 1) - 24 : 12 \cdot 3 & \text{(6)} \\
 \sqrt[3]{-27} + 4 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3^3 & \text{(8)} \\
 -2^5 : (-8) + 4^2 - 3 \cdot 5 & \text{(7)} \\
 (8 - \sqrt[3]{64}) \cdot (2 \cdot (-4) - \sqrt[5]{243}) & \text{(10)} \\
 [6 \cdot (-1)^4 - 10 \cdot (-1)^3] \cdot (-1)^5 & \text{(9)} \\
 \frac{3^2 \cdot (8 - 2 \cdot 3)^3}{(5^2 \cdot 3 - 72) \cdot (-4)} + 2 \cdot \{15 - 20 : (4 + 3 \cdot 2)\} & \text{(11)}
 \end{array}$$

תשובות סופיות:

28 (1)	33 (2)	19 (3)	-37 (4)
31 (5)	-14 (6)	5 (7)	-21 (8)
-16 (9)	-44 (10)	20 (11)	

שברים פשוטים, עשרוניים ואחוזים:

סיכום כללי:

הגדרה כללית:

השבר הוא חלק מתוך השלם. מקובל לסמן שבר באמצעות קו שבר המפריד בין המונה (החלק העליון) למכנה (החלק התחתון) באופן הבא:

$$\frac{\text{מונה}}{\text{מכנה}}$$

ישנם שלושה סוגים אפשריים של שברים:

- שבר פשוט – בו המונה קטן מהמכנה (ולכן תמיד יהיה קטן מ-1).
- שבר מדומה – בו המונה גדול מהמכנה (יהיה גדול בערכו מ-1).
- שבר מעורב – המכיל שילוב של מספר שלם ושבר כלשהו.

שבר עשרוני:

שבר שהמכנה שלו הוא מספר המהווה כפולות של 10 כגון: 10, 100, 1000 ... שבר עשרוני מיוצג ע"י נקודה עשרונית אשר מבדילה בין החלק שלם לחלק השברי באופן הבא:

$$\underbrace{XX}_{\text{שברים שלמים}}.\underbrace{YYY}$$

כדי להמיר שבר פשוט לשבר עשרוני המכנה צריך להיות בכפולות של 10.

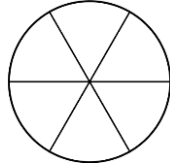
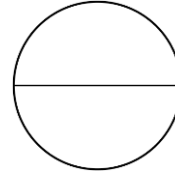
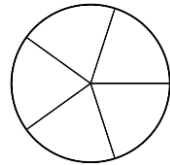
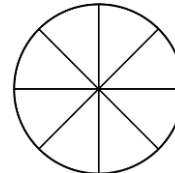
אחוזים - הגדרה:

השבר $\frac{1}{100}$ מוגדר להיות אחוז אחד ומסומן באופן הבא: 1%.

באופן זה השבר $\frac{45}{100}$ יכתב: 45%, והשבר $\frac{145}{100}$ יכתב: 145%.

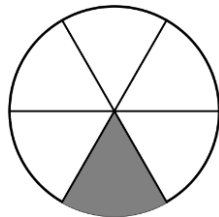
שאלות:

(1) צבע את החלקים המתאימים בכל עיגול:

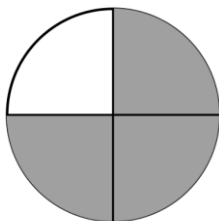
ב. צבע $\frac{1}{6}$ מהעיגולא. צבע $\frac{1}{2}$ מהעיגולד. צבע $\frac{2}{5}$ מהעיגולג. צבע $\frac{3}{8}$ מהעיגול

(2) כתוב את השבר המתאים לחלקים הצבועים בכל אחד מהמקרים הבאים:

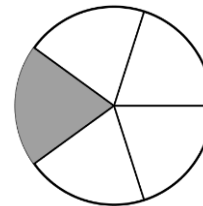
ב. שבר:



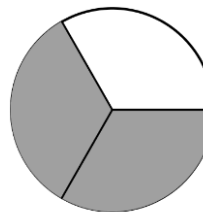
ד. שבר:



א. שבר:



ג. שבר:



(3) הרחב את השברים הבאים:

א. השבר $\frac{1}{2}$ לפי בסיס 4, לפי בסיס 18, לפי בסיס 40.ב. השבר $\frac{3}{5}$ לפי בסיס 10, לפי בסיס 25, לפי בסיס 60.ג. השבר $\frac{5}{8}$ לפי בסיס 16, לפי בסיס 32, לפי בסיס 88.

(4) צמצם את השברים הבאים ככל הניתן :

א. $\frac{25}{30}$	ב. $\frac{10}{30}$	ג. $\frac{6}{24}$	ד. $\frac{4}{20}$
ה. $\frac{35}{56}$	ו. $\frac{24}{42}$	ז. $\frac{36}{48}$	ח. $\frac{33}{121}$

(5) המר את השברים המדומים הבאים לשברים מעורבים :

א. $-\frac{20}{3}$	ב. $\frac{19}{4}$	ג. $\frac{12}{5}$	ד. $\frac{22}{5}$
ה. $-\frac{34}{6}$	ו. $-\frac{50}{7}$	ז. $\frac{47}{8}$	ח. $\frac{60}{9}$

(6) המר את השברים המעורבים הבאים לשברים מדומים :

א. $1\frac{2}{3}$	ב. $3\frac{5}{6}$	ג. $4\frac{1}{2}$	ד. $6\frac{1}{4}$
ה. $11\frac{3}{4}$	ו. $-2\frac{5}{8}$	ז. $-6\frac{2}{7}$	ח. $12\frac{7}{9}$

(7) קבע איזה שבר גדול יותר בכל אחד מהמקרים הבאים :

א. $\frac{4}{10}$ או $\frac{3}{10}$	ב. $\frac{7}{6}$ או $\frac{7}{8}$
ג. $\frac{5}{6}$ או $\frac{2}{3}$	ד. $\frac{7}{12}$ או $\frac{5}{18}$

(8) המר את השברים העשרוניים הבאים לשברים פשוטים מצומצמים או מעורבים :

א. 0.7	ב. 0.07	ג. 0.007	ד. 0.34
ה. 0.304	ו. 0.65	ז. 1.2	ח. 1.02
ט. 1.42	י. 3.5	יא. 6.03	יב. 5.125

9) המר את השברים הבאים לשברים עשרוניים:

א. $\frac{3}{10}$	ב. $\frac{3}{100}$	ג. $\frac{3}{1000}$	ד. $\frac{23}{1000}$
ה. $\frac{1}{2}$	ו. $\frac{3}{4}$	ז. $\frac{2}{5}$	ח. $\frac{4}{25}$
ט. $\frac{7}{50}$	י. $\frac{3}{20}$	יא. $\frac{7}{8}$	יב. $\frac{9}{16}$
יג. $9\frac{1}{10}$	יד. $3\frac{1}{5}$	טו. $4\frac{7}{8}$	טז. $-4\frac{1}{16}$

10) כתוב את השברים הבאים בצורתם העשרונית (היעזר במחשבון וכתוב עד 3 ספרות אחרי הנקודה העשרונית):

א. $\frac{2}{3}$	ב. $\frac{5}{6}$	ג. $\frac{3}{7}$	ד. $\frac{2}{11}$
------------------	------------------	------------------	-------------------

11) המר מאחוזים לשברים פשוטים:

א. 25%	ב. 32%	ג. 64%	ד. 80%
ה. 120%	ו. 5%	ז. 300%	ח. 150%

12) המר משברים פשוטים לאחוזים:

א. $\frac{3}{4}$	ב. $\frac{1}{8}$	ג. $\frac{4}{5}$	ד. $\frac{7}{20}$
ה. $\frac{11}{40}$	ו. $\frac{70}{125}$	ז. $\frac{5}{6}$	ח. $\frac{4}{9}$

תשובות סופיות:

(1) תשובה מודגמת בסרטון.

$$(2) \quad \text{א. } \frac{1}{5} \quad \text{ב. } \frac{1}{6} \quad \text{ג. } \frac{2}{3} \quad \text{ד. } \frac{3}{4}$$

$$(3) \quad \text{א. } \frac{4}{8}, \frac{18}{36}, \frac{40}{80} \quad \text{ב. } \frac{30}{50}, \frac{75}{125}, \frac{180}{300} \quad \text{ג. } \frac{80}{128}, \frac{160}{256}, \frac{440}{700}$$

$$(4) \quad \text{א. } \frac{5}{6} \quad \text{ב. } \frac{1}{3} \quad \text{ג. } \frac{1}{4} \quad \text{ד. } \frac{1}{5} \quad \text{ה. } \frac{5}{8} \quad \text{ו. } \frac{4}{7}$$

$$\text{ז. } \frac{3}{4} \quad \text{ח. } \frac{3}{11}$$

$$(5) \quad \text{א. } -6\frac{2}{3} \quad \text{ב. } 4\frac{3}{4} \quad \text{ג. } 2\frac{2}{5} \quad \text{ד. } 4\frac{2}{5} \quad \text{ה. } -5\frac{4}{6} \quad \text{ו. } -7\frac{1}{7}$$

$$\text{ז. } 5\frac{7}{8} \quad \text{ח. } 6\frac{2}{3}$$

$$(6) \quad \text{א. } \frac{5}{3} \quad \text{ב. } \frac{23}{6} \quad \text{ג. } \frac{9}{2} \quad \text{ד. } \frac{25}{4} \quad \text{ה. } \frac{47}{4} \quad \text{ו. } -\frac{21}{8}$$

$$\text{ז. } -\frac{44}{7} \quad \text{ח. } \frac{115}{9}$$

$$(7) \quad \text{א. } \frac{4}{10} \quad \text{ב. } \frac{7}{6} \quad \text{ג. } \frac{5}{6} \quad \text{ד. } \frac{7}{12}$$

$$(8) \quad \text{א. } \frac{7}{10} \quad \text{ב. } \frac{7}{100} \quad \text{ג. } \frac{7}{1000} \quad \text{ד. } \frac{17}{50} \quad \text{ה. } \frac{38}{125} \quad \text{ו. } \frac{13}{20}$$

$$\text{ז. } 1\frac{1}{5} \quad \text{ח. } 1\frac{1}{50} \quad \text{ט. } 1\frac{21}{50} \quad \text{י. } 3\frac{1}{2} \quad \text{יא. } 6\frac{3}{100} \quad \text{יב. } 5\frac{1}{8}$$

$$(9) \quad \text{א. } 0.3 \quad \text{ב. } 0.03 \quad \text{ג. } 0.003 \quad \text{ד. } 0.023 \quad \text{ה. } 0.5 \quad \text{ו. } 0.75$$

$$\text{ז. } 0.4 \quad \text{ח. } 0.16 \quad \text{ט. } 0.14 \quad \text{י. } 0.15 \quad \text{יא. } 0.875$$

$$\text{יב. } 0.5625 \quad \text{יג. } 9.1 \quad \text{יד. } 3.2 \quad \text{טו. } 4.875 \quad \text{טז. } -4.0625$$

$$(10) \quad \text{א. } 0.\bar{6} \quad \text{ב. } 0.8\bar{3} \quad \text{ג. } 0.428 \quad \text{ד. } 0.1\bar{8}$$

$$(11) \quad \text{א. } \frac{1}{4} \quad \text{ב. } \frac{8}{25} \quad \text{ג. } \frac{16}{25} \quad \text{ד. } \frac{4}{5} \quad \text{ה. } 1\frac{1}{5} \quad \text{ו. } \frac{1}{20}$$

$$\text{ז. } 3 \quad \text{ח. } 1\frac{1}{2}$$

(12 א. 75% ב. 12.5% ג. 80% ד. 35% ה. 27.5% ו. 56%

ז. 83.333% ח. 44.444%

כפל וחילוק שברים:

סיכום כללי:

- כשכופלים שני שברים יש לכפול מונה במונה ומכנה במכנה.
 - במידה ומדובר במספר שלם הכופל שבר, יש לכפול אותו במונה.
 - במידה ומדובר בשברים מעורבים, יש להפוך אותם תחילה לשברים מדומים ורק אז לבצע את פעולת הכפל.
- כדי לחלק שברים, יש לכפול את השבר הראשון בהופכי של השבר השני.
 - הופכי של שבר מסוים מתקבל ע"י החלפת המונה במכנה.

שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4}$	ב. $\frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6}$	ג. $\frac{2}{9} \cdot \frac{8}{10}$
ד. $3 \cdot \frac{4}{5}$	ה. $6 \cdot \frac{2}{3}$	ו. $\frac{12}{25} \cdot 5$
ז. $1\frac{3}{5} \cdot 2\frac{1}{4}$	ח. $3\frac{1}{2} \cdot 4\frac{2}{5}$	ט. $3\frac{3}{7} \cdot 2\frac{2}{5}$
י. $\left(\frac{4}{5}\right)^3$	יא. $\frac{4}{5^3}$	יב. $\frac{4^3}{5}$

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{2}{5} : \frac{4}{9}$	ב. $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$	ג. $\frac{3}{25} : \frac{7}{10}$
ד. $8 : \frac{2}{9}$	ה. $10 : \frac{2}{3}$	ו. $\frac{5}{6} : 3$
ז. $\frac{2}{5} : 5$	ח. $3\frac{3}{4} : 5\frac{5}{8}$	ט. $2\frac{2}{5} : 1\frac{3}{15}$

תשובות סופיות:

א. $\frac{9}{20}$	ב. $\frac{5}{21}$	ג. $\frac{8}{45}$	ד. $2\frac{2}{5}$	ה. 4	ו. $2\frac{2}{5}$
ז. $3\frac{3}{5}$	ח. $15\frac{2}{5}$	ט. $8\frac{8}{35}$	י. $\frac{64}{125}$	יא. $\frac{4}{125}$	יב. $12\frac{4}{5}$
א. $\frac{9}{10}$	ב. $1\frac{1}{2}$	ג. $\frac{6}{35}$	ד. 36	ה. 15	ו. $\frac{5}{18}$
ז. $\frac{2}{25}$	ח. $\frac{2}{3}$	ט. 2			

חיבור וחיסור שברים:

סיכום כללי:

כפולה משותפת מינימלית:

בהינתן זוג מספרים a ו- b , המספר הקטן ביותר אשר תוצאת חלוקתו במספרים הנ"ל מניבה מספר שלם נקרא הכפולה המינימלית שלהם.

הערות:

- כפולה מינימלית יכולה להיות גם עבור יותר משני מספרים.
- הכפולה המינימלית תהיה המכנה המשותף בעת פעולות חיבור וחיסור של שברים.

כללי החיבור והחיסור של שברים:

- חיבור וחיסור של שברים בעלי אותו המכנה מתבצע על המספרים שבמונה בלבד כאשר המכנה נשאר כפי שהוא.
 דוגמא: $\frac{2}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2-3}{7} = \frac{-1}{7}$, $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}$
- חיבור וחיסור של שברים בעלי מכנים שונים מתבצע ע"י פעולת מכנה משותף.
 דוגמא: $\frac{1}{4} - \frac{5}{6} = \frac{3}{12} - \frac{10}{12} = \frac{3-10}{12} = -\frac{7}{12}$, $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{6+5}{15} = \frac{11}{15}$
- חיבור של שבר עם מספר שלם יתבצע באופן ישיר.
 דוגמא: $3 + \frac{1}{4} = 3\frac{1}{4}$
 חיסור של שבר ממספר שלם יתבצע ע"י הוצאת שלמים מהשבר.
 דוגמא: $3 - \frac{1}{4} = 2\frac{4}{4} - \frac{1}{4} = 2\frac{3}{4}$
 דרך נוספת היא ע"י העברת המספר השלם לשבר מדומה: $3 - \frac{1}{4} = \frac{12}{4} - \frac{1}{4} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$

- חיבור וחסור של שברים מעורבים יתבצע ע"י העברתם לשברים מדומים תחילה.

$$\text{דוגמא: } 3\frac{2}{5} + 2\frac{1}{6} = \frac{17}{5} + \frac{13}{6} = \frac{17 \cdot 6}{30} + \frac{13 \cdot 5}{30} = \frac{102 + 65}{30} = \frac{167}{30} = 5\frac{17}{30}$$

ניתן גם לפצל ולבצע את פעולת החיבור (או החיסור) של המספרים השלמים תחילה, ולאחר מכן לבצע את הפעולה עבור השברים.

$$\text{דוגמא: } 2\frac{3}{4} - 5\frac{1}{3} = (2 - 5) + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) = -3 + \left(\frac{9}{12} - \frac{4}{12}\right) = -3 + \frac{5}{12} = -2\frac{7}{12}$$

שאלות:

- (1) מצא את הכפולה המשותפת המינימלית של המספרים הבאים:

א. 2 ו-3	ב. 2 ו-4	ג. 3 ו-5	ד. 6 ו-10
ה. 4 ו-10	ו. 4 ו-6	ז. 3, 5 ו-10	ח. 2, 3 ו-8

- (2) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}$	ב. $\frac{5}{9} + \frac{2}{9}$
ג. $\frac{4}{13} + \frac{9}{13}$	ד. $\frac{7}{8} + \frac{7}{8}$
ה. $\frac{7}{8} - \frac{3}{8}$	ו. $\frac{8}{9} - \frac{7}{9}$
ז. $\frac{2}{12} - \frac{5}{12}$	ח. $\frac{2}{5} - \frac{6}{5}$
ט. $\frac{2}{8} + \frac{5}{8} + \frac{6}{8}$	י. $\frac{7}{15} + \frac{8}{15} - \frac{6}{15}$

(3) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{2} + \frac{4}{3}$

ב. $\frac{3}{5} + \frac{1}{10}$

ג. $\frac{4}{6} - \frac{1}{12}$

ד. $\frac{3}{6} - \frac{5}{8}$

ה. $\frac{5}{4} + \frac{7}{2} + \frac{2}{8}$

ו. $\frac{7}{3} + \frac{6}{5} + \frac{3}{10}$

ז. $\frac{4}{7} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$

ח. $\frac{1}{4} + \frac{2}{8} - \frac{3}{5}$

(4) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $2 + \frac{5}{6}$

ב. $2 - \frac{5}{6}$

ג. $2\frac{1}{4} + \frac{5}{6}$

ד. $2\frac{1}{4} - \frac{5}{6}$

ה. $3\frac{2}{3} + 4\frac{1}{4}$

ו. $5\frac{7}{8} - 6\frac{1}{2}$

ז. $2 + \frac{5}{6} - \frac{1}{9}$

ח. $\frac{3}{4} - 1\frac{1}{5} + \frac{8}{20}$

(5) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) + 2\frac{1}{3}$

ב. $\frac{3}{14} : \frac{2}{7} + \frac{1}{3} \cdot 2\frac{1}{4} - \frac{2}{5}$

ג. $\frac{5}{11} \cdot 2\frac{3}{4} - 6 : \frac{2}{5}$

ד. $2\frac{4}{5} : \frac{9}{10} \cdot \frac{6}{7} + \frac{1}{6}$

ה. $\frac{5}{6} : \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot 3\frac{1}{4}$

תשובות סופיות:

12. ו.	20. ה.	30. ד.	15. ג.	4. ב.	6. א. (1
				24. ח.	30. ז.
$\frac{1}{9}$. ו.	$\frac{1}{2}$. ה.	$1\frac{3}{4}$. ד.	1. ג.	$\frac{7}{9}$. ב.	$\frac{4}{5}$. א. (2
		$\frac{3}{5}$. י.	$1\frac{5}{8}$. ט.	$-\frac{4}{5}$. ח.	$-\frac{1}{4}$. ז.
$3\frac{5}{6}$. ו.	5. ה.	$-\frac{1}{8}$. ד.	$\frac{7}{12}$. ג.	$\frac{7}{10}$. ב.	$1\frac{5}{6}$. א. (3
				$-\frac{1}{10}$. ח.	$\frac{19}{21}$. ז.
$-\frac{5}{8}$. ו.	$7\frac{11}{12}$. ה.	$1\frac{5}{12}$. ד.	$3\frac{1}{12}$. ג.	$1\frac{1}{6}$. ב.	$2\frac{5}{6}$. א. (4
				$-\frac{1}{20}$. ח.	$2\frac{13}{18}$. ז.
	$3\frac{5}{18}$. ה.	$2\frac{5}{6}$. ד.	$-13\frac{3}{4}$. ג.	$1\frac{1}{10}$. ב.	$2\frac{11}{24}$. א. (5

בעיות יסודיות באחוזים:

סיכום כללי:

נוסחה לביצוע חישובים עם אחוזים:

$$\text{תמורת האחוז} = \text{שלם} \cdot \frac{\text{אחוז}}{100}$$

למשל, בהינתן גודל שלם 120, אשר יש לחשב כמה הם 40 אחוזים ממנו, נקבל לפי הנוסחה: $48 = 120 \cdot \frac{40}{100}$, כלומר: **תמורת האחוז 40 מהגודל 120 היא 48.**

שאלות:

- (1) בכיתה 30 תלמידים. 60% מתוכם בנות.
 - א. כמה בנות בכיתה?
 - ב. כמה בנים בכיתה?
- (2) בכיתה 28 בנות המהוות 70% מכלל התלמידים בכיתה.
 - א. כמה תלמידים בכיתה?
 - ב. כמה בנים בכיתה?
- (3) מחיר בגד-ים הוא 300 ₪. בסוף העונה הוא נמכר ב-20% הנחה.
 - א. מהו מחירו בסוף העונה?
 - ב. מה גודל ההנחה?
- (4) מחיר ההשקה של בושם מסוים הוא 500 ₪. לאחר מכן מועלה מחירו ב-8%.
 - א. מה מחירו הסופי?
 - ב. מה גודל ההתייקרות?
- (5) מחיר ליטר דלק הוא 5 ₪ לליטר. בחנוכה מוזל מחירו ב-7%.

בפסח מועלה מחירו ב-7%. מה מחירו בסוף השנה?
- (6) מוצר מסויים מתייקר בסוכות ב-12%. בפורים מוזל המוצר ב-12%.

מחירו בסוף השנה הוא 394.24 ₪. מה מחירו בתחילת השנה?

(7) ענה על השאלות הבאות :

- א. באולם קולנוע 200 צופים, מתוכם 176 בנים.
מה אחוז הבנים בקהל?
- ב. בכיתה 30 תלמידים, מתוכם 18 בנות.
מה אחוז הבנות בכיתה?
- ג. מחיר מוצר התייקר מ-80 ₪ ל-120 ₪.
בכמה אחוזים התייקר המוצר?
- ד. מחיר מוצר הוזל מ-120 ₪ ל-80 ₪.
בכמה אחוזים הוזל המוצר?
- ה. מחיר מוצר התייקר מ-150 ₪ ל-200 ₪.
בכמה אחוזים התייקר המוצר?
- ו. מחיר מוצר מוזל הוזל מ-200 ₪ ל-150 ₪.
בכמה אחוזים הוזל המוצר?

תשובות סופיות:

- | | | |
|-----|----------------|-------------|
| (1) | א. 18 בנות. | ב. 12 בנים. |
| (2) | א. 40 תלמידים. | ב. 12 בנים. |
| (3) | א. 240 ₪ | ב. 60 ₪ |
| (4) | א. 540 ₪ | ב. 40 ₪ |
| (5) | 4.9755 ₪ | |
| (6) | 400 ₪ | |
| (7) | א. 88% | ב. 60% |
| | ג. 50% | ד. 33.33% |
| | ה. 33.33% | ו. 25% |

חזרה על תבניות מספר:

סיכום כללי:

משתנה הוא סמל המתאר כמות או גודל כלשהם אשר אינם ידועים ועשויים להשתנות.

תבנית מספר היא ביטוי אלגברי אשר מכיל משתנה (או משתנים).

ניתן להציב במשתנים ערכים מספריים שונים ולקבל תוצאות שונות עבור תבנית המספר עצמה.

במתמטיקה, תפקידה של תבנית המספר הוא להביע גודל מסוים אשר לערכו יש משמעויות שונות. דוגמא לכך היא: קנייה של x פריטים, אשר כל אחד עולה 3 שקלים, יניבו תבנית מספר של $3 \cdot x$ אשר מייצגת את הסכום הכולל של הפריטים.

שאלות:

(1) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה- x הנתון:

- | | |
|----------------------------|---------------------------|
| א. $2x+5$ כאשר $x=3$ | ב. x^2+3x כאשר $x=2$ |
| ג. $-x^2+2x+3$ כאשר $x=5$ | ד. $-x^2-9x+5$ כאשר $x=5$ |
| ה. x^3+1 כאשר $x=-2$ | ו. $4-x^3$ כאשר $x=-1$ |
| ז. $(x+1)(2-x)$ כאשר $x=4$ | ח. $x^2(3x-4)$ כאשר $x=3$ |

(2) חשב את ערכי הביטויים האלגבריים הבאים עבור ה- x הנתון:

- א. $27x^5-2x^3+x$ כאשר $x=\frac{1}{3}$.
- ב. $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+6$ כאשר $x=-\frac{2}{3}$.

(3) הצב את הערכים המספריים במקום הפרמטרים וחשב את ערך תבנית המספר :

א. $a^2 + 2ab + b^2$	עבור : $a = 3, b = -5$
ב. $(x-3)^2 + 3x^2b$	עבור : $x = 5, b = -1$
ג. $-x^3 - 2xy + y^4$	עבור : $x = -2, y = -1$
ד. $\frac{(a-2c)^4}{a} - a^2$	עבור : $a = 2, c = -2$
ה. $\frac{4a^2 - 3b}{c}$	עבור : $a = -1, b = 2, c = -4$
ו. $\sqrt{c-3a}$	עבור : $c = 13, a = -1$ ועבור : $c = 82, a = \frac{1}{3}$
ז. $\frac{p^3 + 2\sqrt{q+1}}{m}$	עבור : $p = -5, q = 48, m = 3$

תשובות סופיות:

(1)	א. 11	ב. 10	ג. -12	ד. -65	ה. -7	ו. 5
	ז. -10	ח. 45				
(2)	א. $\frac{10}{27}$	ב. $5\frac{22}{27}$				
(3)	א. 4	ב. -71	ג. 5	ד. 644	ה. $\frac{1}{2}$	
				ז. -37		
	ו. הצבה ראשונה : 4, הצבה שניה : 9					

כינוס איברים:

סיכום כללי:

תבניות אלגבריות יכולות להכיל איברים רבים ולכן נרצה לכנס אותם על מנת לפשט את התבנית. כדי לכנס איברים ניקח את כל קבוצת האיברים מאותו הסוג ונחבר את המקדמים שלהם. דוגמא: $3x + 6x - 5x = (3 + 6 - 5)x = 4x$.
 איברים שונים נבדלים זה מזה בערך התבנית האלגברית שלהם.
 כך: $3x$ שונה מ- $4y$ ושונה מ- $2xy$. באותו האופן, האיברים x ו- x^2 הם שונים.

שאלות:

כנס איברים דומים:

- | | |
|---|--|
| $9x^2 - 2x^2 - 3x^2 - 2x^2$ (2) | $5x + 7x - 4x$ (1) |
| $x^2y - 3yx^2 + x^2y$ (4) | $-10xy + 15xy + xy - 2yx$ (3) |
| $2x^2 - 3m^2 - x^2 + 3m^2$ (6) | $8a^2 + 10a - 5a^2 - 11a + a^2$ (5) |
| $mn^2 + 4m^2n + 6n^2m - 10nm^2 + mn^2$ (8) | $3xy + y - 30y + 6yx - 7y$ (7) |
| $y^2 + x^2 - 5x^2 + 5y^2 + 4x^2 - 6y^2$ (10) | $-6 + x^3 + 4 - 3x^3 + 17x^3 - 17$ (9) |
| $5xy + 2x - 3yx - x + 1$ (12) | $7x^2 - 3x - 4x + 2$ (11) |
| $x + xy + y - 6yx - 6y - 6x$ (14) | $3 - x - x^2 + 4x + 5x^2 - 12$ (13) |
| $ab^2 + 6ba^2 - 6b + 16a^2b + 3b - 6b^2a$ (16) | $mn + n - 5m + 5nm - 14n + 3m$ (15) |
| $4x^2z + 6xz^2 - 6 - xz^2 + 12 + 10zx^2$ (18) | $z^3 - 4z^2 + 7 - z^3 - 8 + 8z^2$ (17) |
| $x^3 - 3x - 4x^2 + 2x + x^3 + x^2 - 2x^3$ (20) | $2 - x^3 - 3 - 4x^2 + 2x + x^3 + x^2 - 2$ (19) |
| $12x^2y^3 + 13a^2 - 20x^2y^3 + 2a^2$ (22) | $2a^2b + 3x^2y + 5a^2b + 10x^2y$ (21) |
| $-2x^3y + 5x^2 - 4yx^3 - 6x^2$ (24) | $2y^2 - 4x^3y^2 - 10y^2 - x^3y^2$ (23) |
| $5a^2b - 8ab^2 + 20a^2b - 14ab^2$ (26) | $2a^2b + 2b + 3a^2 + 5b$ (25) |
| $-12x^2 + 2y^2 + 3x^2y + 14xy^2 - 5xy^2 - 6y^2 + 2xy + 11x^2 + x^2y - 9xy$ (27) | |
| $21x^3y^3 + x^2y^2 - 3xy^3 + x^3y - 15x^2y^2 - 7x^3y + 12x^3y^3 - 4xy^3 + 4xy^3 - 6x^3y$ (28) | |

תשובות סופיות:

- | | | |
|---------------------------|------------------------|---|
| $4xy$ (3) | $2x^2$ (2) | $8x$ (1) |
| x^2 (6) | $4a^2 - a$ (5) | $-x^2y$ (4) |
| $15x^3 - 19$ (9) | $8mn^2 - 6nm^2$ (8) | $9xy - 36y$ (7) |
| $2xy + x + 1$ (12) | $7x^2 - 7x + 2$ (11) | 0 (10) |
| $-13n - 2m + 6mn$ (15) | $-5x - 5y - 5xy$ (14) | $4x^2 + 3x - 9$ (13) |
| $14x^2z + 5xz^2 + 6$ (18) | $4z^2 - 1$ (17) | $-5ab^2 + 22a^2b - 3b$ (16) |
| $7a^2b + 13x^2y$ (21) | $-3x^2 - x$ (20) | $-3x^2 + 2x - 3$ (19) |
| $-6x^3y - x^2$ (24) | $-8y^2 - 5x^3y^2$ (23) | $-8x^2y^3 + 15a^2$ (22) |
| | $25a^2b - 22ab^2$ (26) | $2a^2b + 3a^2 + 7b$ (25) |
| | | $-x^2 - 4y^2 + 4x^2y + 9xy^2 - 7xy$ (27) |
| | | $33x^3y^3 - 14x^2y^2 - 3xy^3 - 12x^3y$ (28) |

פישוט ביטויים ע"י פתיחת סוגריים:

סיכום כללי:

בעת ביצוע כפל בין שני איברים יש לכפול את המקדמים בנפרד ואת האותיות (משתנים) בנפרד.

כלל הפילוג:

$$\bullet a(b+c) = ab+ac$$

$$\bullet (a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$$

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $2x \cdot 3x$	ב. $-4x \cdot (-7x)$	ג. $-2x \cdot (-4x) \cdot (-3)$
ד. $8m^2 \cdot 4m^3$	ה. $3a^3 \cdot (-2a^2)$	ו. $-b \cdot 4b^2 \cdot \frac{b^2}{2}$
ז. $a \cdot 3b$	ח. $4a^2 \cdot 7b^2$	ט. $ab \cdot (-2a^2b)$

(2) פשט את הביטויים הבאים ע"י פתיחת סוגריים:

א. $2(3x-4)$	ב. $2(-3x^2+5x-1)$
ג. $(7x-2)4$	ד. $(1-2x)(-2)$
ה. $a(3a-1)$	ו. $b(b^2-3b+4)$
ז. $2x(5x+3)$	ח. $5x(x^2+2x-3)$
ט. $3t^2(4t-t^2+6)$	י. $\frac{5}{2}(4d^4-3d)d$

(3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $5x+(3x-2)+(-4-2x)$	ב. $7x+(-4x-5)+3x+(-1+7x)$
ג. $8-(2x-5)-(4x+2)$	ד. $-6x-(-3x-1)-(-7-4x)+1$

$$\begin{aligned} & \text{ה. } (3-2x^2+4)2+3(x-x^2)-6(7-5x)+4x^2 \\ & \text{ו. } 3y^2-(y+1-2y^2)+6(5y-6)-(-y-4)3+5(y^2+1)-7 \end{aligned}$$

(4) פשט את הביטויים הבאים :

$$\begin{aligned} & \text{א. } (x-1)(x+2) \quad \text{ב. } (x+3)(x-7) \\ & \text{ג. } (3-x)(x+4) \quad \text{ד. } (3x+4)(5x+1) \\ & \text{ה. } 3(4x+1)(2x-3) \quad \text{ו. } -2(3x-1)(5-2x) \end{aligned}$$

(5) פשט את ערכי הביטויים הבאים :

$$\begin{aligned} & \text{א. } (x-1)(x+3)+2(3-x) \\ & \text{ב. } (a+4)(a-2)-(a+5)(a-3) \\ & \text{ג. } (2m-3)(4m+3)+5(2m^2-6) \\ & \text{ד. } -x^2y^2(x^3y+x^2)+2xy(2x^3y-x^4y^2) \end{aligned}$$

תשובות סופיות:

$$\begin{aligned} & \text{(1) א. } 6x^2 \quad \text{ב. } 28x^2 \quad \text{ג. } -24x^2 \quad \text{ד. } 32m^5 \quad \text{ה. } -6a^5 \quad \text{ו. } -2b^5 \\ & \quad \text{ז. } 3ab \quad \text{ח. } 28a^2b^2 \quad \text{ט. } -2a^3b^2 \\ & \text{(2) א. } 6x-8 \quad \text{ב. } -6x^2+10x-2 \quad \text{ג. } 28x-8 \quad \text{ד. } -2+4x \\ & \quad \text{ה. } 3a^2-a \quad \text{ו. } b^3-3b^2+4b \quad \text{ז. } 10x^2+6x \quad \text{ח. } 5x^3+10x^2-15x \\ & \quad \text{ט. } 12t^3-3t^4+18t^2 \quad \text{י. } 10d^5-7.5d^2 \\ & \text{(3) א. } 6x-6 \quad \text{ב. } 13x-6 \quad \text{ג. } -6x+11 \quad \text{ד. } x+9 \quad \text{ה. } -3x^2+33x-28 \\ & \quad \text{ו. } 10y^2+32y-27 \\ & \text{(4) א. } x^2+x-2 \quad \text{ב. } x^2-4x-21 \quad \text{ג. } -x^2-x+12 \\ & \quad \text{ד. } 15x^2+23x+4 \quad \text{ה. } 24x^2-30x-9 \quad \text{ו. } 12x^2-34x+10 \\ & \text{(5) א. } x^2+3 \quad \text{ב. } 7 \quad \text{ג. } 18m^2-6m-39 \quad \text{ד. } -3x^5y^3+3x^4y^2 \end{aligned}$$

פישוט ביטויים באמצעות נוסחאות הכפל המקוצר:

סיכום כללי:

- נוסחת ריבוע של סכום/הפרש: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
- נוסחה להפרש ריבועים: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x+5)^2$	ב. $(x+2)^2$	ג. $(4x+5)^2$
ד. $(6x+2)^2$	ה. $(7x+y)^2$	ו. $(5x+2y)^2$
ז. $(x^2+7)^2$	ח. $(x^2+y^2)^2$	ט. $(x^3+2y^2x)^2$

(2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-6)^2$	ב. $(x-2)^2$	ג. $(5-x)^2$
ד. $(6x-1)^2$	ה. $\left(3x-\frac{1}{2}\right)^2$	ו. $\left(\frac{1}{3}x-5\right)^2$
ז. $(3m-2n)^2$	ח. $\left(x^2-\frac{3}{5}y\right)^2$	ט. $(x^2y^2-7)^2$

(3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $(x-5)(x+5)$	ב. $(3+x)(x-3)$
ג. $(3x-1)(3x+1)$	ד. $(5-7x)(7x+5)$
ה. $\left(\frac{1}{2}x+6\right)\left(\frac{1}{2}x-6\right)$	ו. $\left(5y-\frac{1}{4}x\right)\left(\frac{1}{4}x+5y\right)$
ז. $(x^2+y)(x^2-y)$	ח. $(3a^2b^3-4)(3a^2b^3+4)$

(4) פשט את הביטויים הבאים :

א. $(x+1)(x+2)-3x$ ב. $(x-5)(5x-1)+2(4+x)$
 ג. $x(2x-1)(2x+1)-4x^2(x+1)$ ד. $-(y+3x)(y-3x)+(y-3x)^2$
 ה. $x(x+3)-(6+x)(6x+2)-(x+2)^2$
 ו. $-5(x+7)(x-7)+3(2x+5)(5-x)+(x+1)^2$

תשובות סופיות:

(1) א. $x^2+10x+25$ ב. x^2+4x+4 ג. $16x^2+40x+25$
 ד. $36x^2+24x+4$ ה. $49x^2+14xy+y^2$ ו. $25x^2+20xy+4y^2$
 ז. $x^4+14x+49$ ח. $x^4+2x^2y^2+y^4$ ט. $x^6+4x^4y^2+4y^4x^2$
 (2) א. $x^2-12x+36$ ב. x^2-4x+4 ג. $25-10x+x^2$
 ד. $36x^2-12x+1$ ה. $9x^2-3x+\frac{1}{4}$ ו. $\frac{1}{9}x^2-3\frac{1}{3}x+25$
 ז. $9m^2-12mn+4n^2$ ח. $x^4-\frac{6}{5}x^2y+\frac{9}{25}y^2$ ט. $x^4y^4-14x^2y^2+49$
 (3) א. x^2-25 ב. x^2-9 ג. $9x^2-1$ ד. $25-49x^2$
 ה. $\frac{1}{4}x^2-36$ ו. $25y^2-\frac{1}{16}x^2$ ז. x^4-y^2 ח. $9a^4b^6-16$
 (4) א. x^2+2 ב. $5x^2-24x+13$ ג. $-4x^2-x$
 ד. $18x^2-6xy$ ה. $-6x^2-39x-16$ ו. $-10x^2+17x+321$

פירוק לגורמים של ביטויים אלגבריים:

סיכום כללי:

פירוק לגורמים הוא פעולה הפוכה לפתיחת סוגריים – נרצה להוציא את הגורמים המשותפים לאיברים מחוץ לסוגריים.

- פירוק לגורמים ע"י הוצאת איבר אחד משותף:

○ הוצאת מספר משותף: $2x - 8 = 2(x - 4)$

○ הוצאת אות משותפת: $x^2 - 12x = x(x - 12)$

○ הוצאת מספר ואות יחד: $3x^2 - 21x = 3x(x - 7)$

- פירוק לגורמים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר:

○ נוסחת הבינום של ניוטון: $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

○ נוסחה להפרש ריבועים: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

שאלות:

- (1) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $3x - 12$ ב. $6y - 4$

ג. $20 - 8a$ ד. $4a^3 + 8b$

ה. $75m^2 + 25m + 15$ ו. $40a^2 - 8b^2 + 64c^2$

- (2) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף:

א. $y^2 + 5y$ ב. $3x - 11x^3$

ג. $6y^2 + 5y^3 + 4y$ ד. $\frac{1}{2}a^7 - \frac{1}{4}a^5 + a^3$

(3) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף :

א. $2x^2 - 8x$	ב. $3t^2 + 12t$
ג. $5n^3 - 20n^2 + 50n$	ד. $8y^2 + 6y^3 - 2y^4$
ה. $4x^2y^2 + 16x^2y - 20xy^2$	ו. $27mn - 3n^2m + 9n^3m$

(4) פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר :

א. $x^2 + 10x + 25$	ב. $x^2 + 12x + 36$
ג. $y^2 - 18y + 81$	ד. $y^2 - 22y + 121$
ה. $4x^2 + 4x + 1$	ו. $16y^2 - 8y + 1$
ז. $9x^2 - 24x + 16$	ח. $25x^2 + 70x + 49$

(5) פשט את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות הכפל המקוצר :

א. $r^2 - 25$	ב. $x^2 - 81$
ג. $25y^2 - 49$	ד. $121x^2 - 1$
ה. $x^2y^2 - 4$	ו. $9y^4 - 169x^4$

(6) פשט את הביטויים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף ונוסחאות הכפל המקוצר :

א. $y - y^3$	ב. $x^3 - 10x^2 + 25x$
ג. $m^4 - 1$	ד. $196x^4 - 140x^3 + 25x^2$

תשובות סופיות:

1. א. $3(x-4)$ ב. $2(3y-2)$ ג. $4(5-2a)$
 ד. $4(a^3+2b)$ ה. $5(15m^2+5m+3)$ ו. $8(5a^2-b^2+8c^2)$
 2. א. $y(y+5)$ ב. $x(3-11x^2)$ ג. $y(6y+5y^2+4)$
 ד. $a^3\left(\frac{1}{2}a^4-\frac{1}{4}a^2+1\right)$
 3. א. $2x(x-4)$ ב. $3t(t+4)$ ג. $5n(n^2-4n+10)$
 ד. $2y^2(4+3y-y^2)$ ה. $4xy(xy+4x-5y)$ ו. $3mn(9-n-3n^2)$
 4. א. $(x+5)^2$ ב. $(x+6)^2$ ג. $(y-9)^2$ ד. $(y-11)^2$
 ה. $(2x+1)^2$ ו. $(4y-1)^2$ ז. $(3x-4)^2$ ח. $(5x+7)^2$
 5. א. $(r+5)(r-5)$ ב. $(x+9)(x-9)$ ג. $(5y+7)(5y-7)$
 ד. $(11x+1)(11x-1)$ ה. $(xy+2)(xy-2)$ ו. $(3y^2+13x^2)(3y^2-13x^2)$
 6. א. $y(1+y)(1-y)$ ב. $x(x-5)^2$ ג. $(m^2+1)(m+1)(m-1)$
 ד. $x^2(14x-5)^2$

פירוק הטרינום:

סיכום כללי:

טרינום משמעו תלת איבר מהצורה: $ax^2 + bx + c$ כאשר a, b ו- c הם מספרים כלשהם.

שיטת הטרינום מאפשרת לפרק את תלת האיבר ל-4 איברים ע"י פיצול האיבר bx לשני איברים באופן כזה שמאפשר להוציא גורם משותף.

הכלל הוא למצוא שני מספרים, m_1 ו- m_2 , שמקיימים: $m_1 \cdot m_2 = ac$ ו- $m_1 + m_2 = b$.
 לאחר מכן ניתן לפרק את הטרינום: $ax^2 + bx + c = ax^2 + m_1x + m_2x + c$.
 השלב האחרון הוא הוצאת גורם משותף מכל זוג: $\underline{ax^2 + m_1x} + \underline{m_2x + c}$.

הערה:

במקרה שנוסחת השורשים ידועה, ניתן להיעזר בה כדי למצוא את המספרים m_1 ו- m_2 באופן

הבא: $m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ולאחר מכן ניתן לכתוב את הטרינום

כמכפלה: $ax^2 + bx + c = a(x - m_1)(x - m_2)$. אם קיים פתרון (שורש) אחד $m_1 = m_2 = \frac{-b}{2a}$ אז

נכתוב: $ax^2 + bx + c = a(x - m_1)^2$ ואם לא קיימים פתרונות אז לא קיים פירוק כלל.

שאלות:

(1) פרק את הביטויים הבאים לפי פירוק טרינום:

א. $x^2 + 5x + 4$	ב. $x^2 - 8x + 15$	ג. $x^2 - 33x + 62$
ד. $2x^2 + 7x - 15$	ה. $3x^2 - 11x + 6$	ו. $6x^2 + 5x + 1$
ז. $2x^2 + x - 6$	ח. $x^2 - 18x + 81$	ט. $x^2 + 2x + 8$

(2) פרק את הביטויים הבאים ע"י שימוש בנוסחת השורשים.

הערה: במידה ולא למדת על נוסחת השורשים התעלם משאלה זו.

א. $6x^2 + 5x + 1$	ב. $x^2 + 5x + 4$
ג. $4x^2 + 20x + 25$	ד. $3x^2 - x + 20$

תשובות סופיות:

- (1) א. $(x+1)(x+4)$ ב. $(x-3)(x-5)$ ג. $(x-2)(x-31)$
- ד. $(2x-3)(x+5)$ ה. $(3x-2)(x-3)$ ו. $(3x+1)(2x+1)$
- ז. $(x+2)(2x-3)$ ח. $(x-9)^2$ ט. אין פירוק.
- (2) א. $6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ ב. $(x+1)(x+4)$ ג. $(2x+5)^2$ ד. אין פירוק.

שברים אלגברים:

סיכום כללי:

הגדרה:

שבר אלגברי מורכב משתי תבניות, אשר אחת מחלקת את השנייה.

$$\text{דוגמא לשברים אלגבריים: } \frac{x+1}{x+2}, \frac{3x}{x^2+1}, \frac{4}{x-x^3}$$

במקרה בו המכנה הוא מספר, לא מדובר בשבר אלגברי מכיוון שניתן לכתוב את

$$\text{הביטוי ללא צורך בחילוק בין ביטויים שונים כגון: } \frac{3x+5}{4} = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$$

תחום הגדרה של שבר:

היות ושבר אלגברי הוא תבנית אשר יכולה לקבל ערכים שונים בעת הצבות שונות, חשוב להגביל את המספרים שניתן להציב באופן כזה שלא תתקבל חלוקה באפס.

$$\text{דוגמא: השבר } \frac{1}{x+4} \text{ לא מוגדר כאשר } x = -4 \text{ מכיוון שמתקבל: } \frac{1}{0}$$

במקרים אלו נדרוש **תנאי** על המשתנה אשר יכתב באופן הבא: $x \neq -4$ ומשמעו היא ש- x יכול לקבל על ערך מספרי אפשרי למעט -4, מכיוון שבמקרה זה השבר לא מוגדר.

כלל צמצום שברים אלגברים:

ניתן לצמצם שברים אלגברים ע"י הבאת המונה והמכנה למכפלה של ביטויים. במידה וקיימות פעולות החיבור והחיסור בין איברים שונים לא ניתן לבצע צמצום של איברים דומים בין המונה והמכנה. להלן מספר דוגמאות הנוגעות לצמצומים:

$$\bullet \text{ צמצום ע"י הוצאת גורם משותף: } \frac{2x+8}{x+4} = \frac{2(x+4)}{x+4} = \frac{2 \cdot 1}{1} = 2$$

$$\bullet \text{ צמצום ע"י נוסחת כפל מקוצר: } \frac{3x-15}{x^2-10x+25} = \frac{3(x-5)}{(x-5)^2} = \frac{3 \cdot 1}{x-5} = \frac{3}{x-5}$$

$$\bullet \text{ צמצום ע"י פירוק טרינום: } \frac{x^2-2x-3}{x^2-3x-4} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-4)} = \frac{x-3}{x-4}$$

שאלות:

(1) מצא את תחום ההגדרה של השברים האלגבריים הבאים :

א. $\frac{x+4}{x+3}$	ב. $\frac{5}{x-6}$
ג. $\frac{x+7}{2x-8}$	ד. $\frac{x^2+1}{x^2-4x}$
ה. $\frac{3}{x^2+2x+1}$	ו. $\frac{x^2}{x^2-4}$
ז. $\frac{6}{y^4-y^2}$	ח. $\frac{8x-2}{3x^3-15x^2+12x}$

(2) צמצם את השברים הבאים (במידה ולא ניתן צמצם הסבר מדוע) :

א. $\frac{ax}{a}$	ב. $\frac{a-x}{a}$
ג. $\frac{a-ax}{a}$	ד. $\frac{x+1}{y+1}$
ה. $\frac{x}{x+y}$	ו. $\frac{6x}{6y}$
ז. $\frac{x^2y}{xy^2}$	ח. $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$
ט. $\frac{4x^2y}{xy}$	י. $\frac{3x^2}{x^2+3}$

(3) צמצם את השברים הבאים ע"י הוצאת גורם משותף וכתוב את תחום הגדרתם :

א. $\frac{3x+12}{x+4}$	ב. $\frac{m^2+4m}{4m+16}$
ג. $\frac{2a-12}{a^2-6a}$	ד. $\frac{x^2-5x}{15-3x}$
ה. $\frac{3-18y^2}{6y^2-1}$	ו. $\frac{4x^3-2x^2}{6x-3}$
ז. $\frac{3y}{y^3-3y^2}$	ח. $\frac{3z^3-12z^2+4z}{z^2+5z}$

(4) צמצם את השברים הבאים ע"י פירוק לגורמים וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{x^2 + 10x + 25}{2x + 10}$	ב. $\frac{8n - n^2}{n^2 - 16n + 64}$
ג. $\frac{z^3 - 4z^2}{2z^2 - 16z + 32}$	ד. $\frac{4m^2 + 20m + 25}{4m^2 + 10m}$
ה. $\frac{18y^2 - 24y + 8}{2y - 3y^2}$	ו. $\frac{a^3 + 4a^2b + 4ab^2}{3ab + 6b^2}$

(5) צמצם את השברים הבאים ע"י טרינום ריבועי וכתוב את תחום הגדרתם:

א. $\frac{x + 2}{x^2 - 3x - 10}$	ב. $\frac{m^2 - 12m + 32}{m - 4}$
ג. $\frac{4y - 10}{2y^2 + y - 15}$	ד. $\frac{3z^2 + 26z + 16}{3z + 2}$
ה. $\frac{x^2 + 5x - 36}{x^3 + 9x^2}$	ו. $\frac{9n^2 - 12n}{4 + 5n - 6n^2}$
ז. $\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 5x + 6}$	ח. $\frac{x^2 - 14x + 49}{x^2 + x - 56}$
ט. $\frac{3a^2b - 10ab^2 + 3b^3}{-3a^3b + 11a^2b^2 - 6ab^3}$	י. $\frac{m^3n - m^2n^2 - m^2 + mn}{2m^2n^3 + mn^2 - 3n}$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x \neq -3 \quad \text{ב. } x \neq 6 \quad \text{ג. } x \neq 4 \quad \text{ד. } x \neq 0, x \neq 4$$

$$\text{ה. } x \neq -1 \quad \text{ו. } x \neq -2, x \neq 2 \quad \text{ז. } y \neq 0, y \neq -1, y \neq 1$$

$$\text{ח. } x \neq 0, x \neq 1, x \neq 4$$

$$(2) \quad \text{א. } x \quad \text{ב. לא ניתן לצמצם} \quad \text{ג. } 1-x$$

$$\text{ד. לא ניתן לצמצם} \quad \text{ה. לא ניתן לצמצם} \quad \text{ו. } \frac{x}{y} \quad \text{ז. } \frac{x}{y}$$

$$\text{ח. לא ניתן לצמצם} \quad \text{ט. } 4x \quad \text{י. לא ניתן לצמצם}$$

$$(3) \quad \text{א. } x \neq -4, 3 \quad \text{ב. } \frac{m}{4}, m \neq -4 \quad \text{ג. } \frac{2}{a}, a \neq 0, 6$$

$$\text{ד. } -\frac{x}{3}, x \neq 5 \quad \text{ה. } -3, y \neq \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \text{ו. } \frac{2x^2}{3}, x \neq \frac{1}{2}$$

$$\text{ז. } \frac{3}{y(y-3)}, y \neq 0, 3 \quad \text{ח. } \frac{3z^2 - 12z + 4}{z+5}, z \neq 0, -5$$

$$(4) \quad \text{א. } \frac{x+5}{2}, x \neq -5 \quad \text{ב. } \frac{n}{8-n}, n \neq 8 \quad \text{ג. } \frac{z^2}{2(z-4)}, z \neq 4$$

$$\text{ד. } \frac{2m+5}{2m}, m \neq 0, -\frac{5}{2} \quad \text{ה. } \frac{2(2-3y)}{y}, y \neq 0, \frac{2}{3} \quad \text{ו. } \frac{a(a+2b)}{3b}, b \neq 0, a \neq -2b$$

$$(5) \quad \text{א. } \frac{1}{x-5}, x \neq 5, -2 \quad \text{ב. } m-8, m \neq 4 \quad \text{ג. } \frac{2}{y+3}, x \neq -3, \frac{5}{2}$$

$$\text{ד. } z+8, z \neq -\frac{2}{3} \quad \text{ה. } \frac{x-4}{x^2}, x \neq 0, -9 \quad \text{ו. } \frac{-3n}{2n+1}, n \neq -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}$$

$$\text{ז. } \frac{x+2}{x+3}, x \neq -2, -3 \quad \text{ח. } \frac{x-7}{x+8}, x \neq 7, -8$$

$$\text{ט. } \frac{3a-b}{a(2b-3a)}, a \neq 0, b \neq 0, a \neq 3b, 2b \neq 3a \quad \text{י. } \frac{m(m-n)}{n(2mn+3)}, mn \neq 1, -\frac{3}{2}, n \neq 0$$

כפל וחילוק של שברים אלגברים:

סיכום כללי:

כפל שברים יתבצע ע"י הכפלת כל מונה בנפרד והכפלת כל מכנה בנפרד.
חילוק שברים יתבצע ע"י לקיחת ההופכי של שבר המחלק וביצוע פעולת כפל.

- דוגמא לכפל שברים: $\frac{x+1}{x^2} \cdot \frac{x}{3x+3} = \frac{x+1}{x^2} \cdot \frac{x}{3(x+1)} = \frac{\cancel{x}(x+1)}{3x^{\cancel{2}}(x+1)} = \frac{1}{3x}$
- דוגמא לחילוק שברים: $\frac{4x}{y} : \frac{12}{y^2+y} = \frac{4x}{y} \cdot \frac{y^2+y}{12} = \frac{\cancel{4}x}{\cancel{12}_3} \cdot \frac{\cancel{y}(y+1)}{\cancel{12}_3} = \frac{x(y+1)}{3}$

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

- | | |
|---|---|
| א. $\frac{x}{3} \cdot \frac{x}{8}$ | ב. $\frac{x}{3} \cdot \frac{9}{x^2}$ |
| ג. $7y \cdot \frac{5}{y^2}$ | ד. $6x^2 \cdot \frac{3}{40x}$ |
| ה. $(x^2 + 3x) \cdot \frac{2}{3x+9}$ | ו. $(a^2 - 25) \cdot \frac{20}{5a+25}$ |
| ז. $\frac{w^2-9}{w} \cdot \frac{w^2}{2w+6}$ | ח. $\frac{y+4}{y^2+16} \cdot \frac{y^2-16}{2y+8}$ |
| ט. $\frac{z^2+30z+225}{6z+90} \cdot \frac{12}{2z-10}$ | י. $\frac{5n^2}{n^2-121} \cdot \frac{2n^2+44n+242}{n+2} \cdot \frac{n^2+4n+4}{n}$ |

(2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{x}{8} : \frac{x}{6}$	ב. $\frac{y}{25} : \frac{5}{y}$
ג. $a^2 : \frac{1}{6a}$	ד. $\frac{5}{6a} : a^2$
ה. $(d^2 - 3d) : \frac{5d - 15}{5d}$	ו. $\frac{t}{t+4} : \frac{3t}{t+4}$
ז. $\frac{y^2 + 8y + 16}{8y^2} : \frac{y^2 - 16}{7y^2}$	ח. $\frac{a^2 - 64}{a^2 - 36} : \frac{a + 8}{a + 6}$

תשובות סופיות:

א. $\frac{x^2}{24}$	ב. $\frac{3}{x}$	ג. $\frac{35}{y}$	ד. $\frac{9x}{20}$	ה. $\frac{2x}{3}$	(1)
ו. $4(a-5)$	ז. $\frac{w(w-3)}{2}$	ח. $\frac{y^2 - 16}{2y^2 + 32}$	ט. $\frac{z+15}{z-5}$	י. $\frac{10n(n+11)(n+2)}{n-11}$	
א. $\frac{3}{4}$	ב. $\frac{y^2}{125}$	ג. $6a^3$	ד. $\frac{5}{6a^3}$	ה. d^2	ו. $\frac{1}{3}$
ז. $\frac{7(y+4)}{8(y-4)}$	ח. $\frac{a-8}{a-6}$				

חיבור וחיסור של שברים אלגברים:

סיכום כללי:

ביצוע פעולת החיבור והחיסור תתבצע באופן זהה לשברים מספריים. נרצה להרחיב את השברים כך שהמכנה של שניהם יהיה זהה, ולאחר מכן נחבר את המונים. כדי להרחיב את השברים נעזר בפעולת מציאת מכנה משותף. לשם כך נעזר בפירוקים השונים כדי להביא את הביטויים שבכל מכנה לצורתם המופשטת. דוגמא לחיבור שברים בעלי אותו מכנה:

$$\frac{1}{x} + \frac{x+1}{x} = \frac{1+(x+1)}{x} = \frac{x+2}{x}$$

דוגמא לחיבור מספר לשבר אלגברי:

$$2 + \frac{3}{x+2} = \frac{2(x+2)}{x+2} + \frac{3}{x+2} = \frac{2(x+2)+3}{x+2} = \frac{2x+7}{x+2}$$

דוגמא לחיבור שברים עם מכנים שונים (ע"י פעולת מכנה משותף):

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{x}{x(x+1)} + \frac{x+1}{x(x+1)} = \frac{x+x+1}{x(x+1)} = \frac{2x+1}{x(x+1)}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י שימוש בפירוק לגורמים (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{1}{x^2-3x} + \frac{3}{x-3} = \frac{1}{x^2-3x} + \frac{3x}{x^2-3x} = \frac{1+3x}{x^2-3x}$$

דוגמא לחיבור שברים ע"י נוסחאות הכפל המקוצר (כדי למצוא מכנה משותף מינימלי):

$$\frac{3}{x^2-6x+9} - \frac{2}{x^2-9} = \frac{3}{(x-3)^2} - \frac{2}{(x-3)(x+3)} = \frac{3(x+3)-2(x-3)}{(x-3)^2(x+3)} = \frac{x+15}{(x-3)^2(x+3)}$$

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{a}{6} + \frac{a-5}{6}$

ג. $\frac{x-2}{x+1} + \frac{3+4x}{x+1}$

ב. $\frac{5}{x} + \frac{4x+3}{x}$

ד. $\frac{7z}{2z-3} - \frac{4z}{2z-3} - \frac{z+3}{2z-3}$

(2) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{1}{ab} - \frac{5}{bc}$

ג. $\frac{c}{ab} - \frac{ad}{bc} + \frac{2b}{cd}$

ה. $\frac{1}{(y+1)^2} + \frac{3}{y+1}$

ב. $\frac{1}{xy} + \frac{5}{yz} + \frac{4}{xz}$

ד. $-\frac{5}{x} + \frac{x+1}{xy^2}$

ו. $\frac{3}{z(z-3)} - \frac{2}{z(z-2)}$

(3) פשט את הביטויים הבאים:

א. $1 - \frac{2}{x}$

ג. $2 + \frac{2}{x+1}$

ה. $\frac{a+1}{a^2} - \frac{3-a}{4a} - 3$

ב. $1 + \frac{3}{y^2}$

ד. $3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x}$

ו. $\frac{x}{9yz} + \frac{z}{3y^2x} + \frac{3-y}{12xz} - 3\frac{1}{2}$

(4) פשט את הביטויים הבאים:

א. $\frac{3}{x+1} + \frac{1}{x}$

ג. $\frac{a+1}{a+2} + \frac{3}{a}$

ב. $\frac{4}{y+2} - \frac{3}{y}$

ד. $\frac{1}{z+3} + \frac{2}{3z} - \frac{3}{z}$

(5) פשט את הביטויים הבאים :

$$\text{א. } \frac{24}{a^2-9} + \frac{4}{a+3}$$

$$\text{ב. } \frac{3}{x^2-16} + \frac{2}{(x+4)^2}$$

$$\text{ג. } \frac{y}{(y-2)^2} + \frac{3y}{4-y^2}$$

$$\text{ד. } \frac{3z}{z^2+4z+3} - \frac{z+0.5}{z^2+2z+1}$$

$$\text{ה. } \frac{x-1}{x^2+3x-40} + \frac{2}{-x^2+8x-15}$$

$$\text{ו. } \frac{2a+3}{2a^2+15a+7} + \frac{a+3}{a^2+14a+49}$$

$$\text{ז. } \frac{x}{x-3} + \frac{9-x}{x^2-8x+15}$$

$$\text{ח. } \frac{1}{a-b} + \frac{2}{a+2b} - \frac{3b}{a^2+ab-2b^2}$$

(6) פשט את הביטויים הבאים :

$$\text{א. } \frac{4}{x} \cdot \frac{x^2}{8} + \frac{9}{x+1} \cdot \frac{x+1}{18}$$

$$\text{ב. } \left(\frac{2}{x} + 1\right) \cdot \frac{x^2}{7x+14}$$

$$\text{ג. } \frac{7}{y^2} : \frac{6}{y^3} - \frac{y-4}{63} \cdot \frac{3y-4}{y^2-8y+16}$$

$$\text{ד. } \left(3x - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}\right) : \frac{6x^3+2x-4}{x^2}$$

$$\text{ה. } \left(\frac{2x+1}{20x^2-28x-3} - \frac{3x+1}{30x^2-17x-2}\right) : \frac{18x+3}{6x^2-13x+6}$$

תשובות סופיות:

- (1) א. $\frac{2a-5}{6}$ ב. $\frac{4x+8}{x}$ ג. $\frac{5x+1}{x+1}$ ד. 1
- (2) א. $\frac{c-5a}{abc}$ ב. $\frac{z+5x+4y}{xyz}$ ג. $\frac{c^2d - a^2d^2 + 2ab^2}{abcd}$
- ד. $\frac{-5y^2 + x + 1}{xy^2}$ ה. $\frac{3y+4}{(y+1)^2}$ ו. $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$
- (3) א. $\frac{x-2}{x}$ ב. $\frac{y^2+3}{y^2}$ ג. $\frac{2x+4}{x+1}$
- ד. $\frac{9x-2}{3x}$ ה. $\frac{-11a^2 + a + 4}{4a^2}$ ו. $\frac{4x^2y + 12z^2 + 9y^2 - 3y^3 - 126xy^2z}{36xy^2z}$
- (4) א. $\frac{4x+1}{x(x+1)}$ ב. $\frac{y-6}{y(y+2)}$ ג. $\frac{a^2 + 4a + 6}{a(a+2)}$
- ד. $-\frac{4z+21}{3z(z+3)}$
- (5) א. $\frac{4}{a-3}$ ב. $\frac{5x+4}{(x-4)(x+4)^2}$ ג. $\frac{2y(4-y)}{(y-2)^2(y+2)}$
- ד. $\frac{(4z+3)(z-1)}{2(z+1)^2(z+3)}$ ה. $\frac{x^2 - 6x - 13}{(x+8)(x-5)(x-3)}$ ו. $\frac{4(a^2 + 6a + 6)}{(a+7)^2(2a+1)}$
- ז. $\frac{x-3}{x-5}$ ח. $\frac{3}{a+2b}$
- (6) א. $\frac{x+1}{2}$ ב. $\frac{x}{7}$ ג. $\frac{147y^2 - 594y + 8}{126(y-4)}$ ד. $\frac{1}{2}$ ה. $\frac{1}{3(10x+1)}$

שברים כפולים:

סיכום כללי:

שבר כפול מורכב באופן הבא: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ כאשר מתקיים: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.
 נובע מכאן כי ניתן לצמצם ביטויים בין שני המכנים או שני המונים בלבד.

שאלות:

פשט את הביטויים הבאים:

- | | |
|---|--|
| $\frac{\frac{y+1}{2y+2}}{5} \quad (2)$ | $\frac{\frac{4x}{12}}{x} \quad (1)$ |
| $\frac{\frac{t^2-81}{9t^2}}{6t+54} \quad (4)$ | $\frac{\frac{5}{t}}{30t^2} \quad (3)$ |
| $\frac{\frac{4x}{x+1}}{8} \quad (6)$ | $\frac{\frac{3y^3-y^2}{25}}{y^2} \quad (5)$ |
| $\frac{x^2+2x+1}{t^2-t-20} \quad (8)$ | $\frac{3-y}{3c^2} \quad (7)$ |
| $\frac{\frac{16t+8}{25-t^2}}{2t+1}$ | $\frac{\frac{3c^3-9c^2-12c}{40}}{15c+15} \quad (9)$ |
| | $\frac{\frac{\frac{1}{x}-4+\frac{x}{x+1}}{1-3x(x+1)}}{5x+5}$ |

תשובות סופיות:

$$\frac{x^2}{3} \quad (1)$$

$$2.5 \quad (2)$$

$$\frac{1}{6t^3} \quad (3)$$

$$\frac{t-9}{54t^2} \quad (4)$$

$$\frac{(3y-1)(3-y)}{25} \quad (5)$$

$$\frac{x(x+1)}{2} \quad (6)$$

$$\frac{c}{c-4} \quad (7)$$

$$\frac{t+4}{-8(t+5)} \quad (8)$$

$$\frac{5}{x} \quad (9)$$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי א

פרק 2 - משוואות אלגבריות

תוכן העניינים

47	1. משוואות ממעלה ראשונה
49	2. מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה
52	3. משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון
53	4. משוואה ממעלה שנייה
55	5. משוואות דו-ריבועיות
57	6. משוואות עם פרמטרים
59	7. משוואות עם שורשים
61	8. משוואות עם ערך מוחלט
62	9. מערכת משוואות ממעלה שנייה
64	10. משוואות מתקדמות מסכמות
67	11. פישוט ביטויים ומשוואות ממעלה שלישית

משוואה ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה היא מהצורה: $ax = b$ (כלומר, החזקה של הנעלם היא 1).

פתרון של משוואה ממעלה ראשונה הוא $x = \frac{b}{a}$ כאשר $a \neq 0$.

שלבי הפתרון הם:

1. ביצוע מכנה משותף (במידה וצריך).
2. פתיחת סוגריים אם ישנם.
3. העברת אגפים וכינוס אברים דומים (בידוד הנעלם באגף אחד והמספרים באגף שני).
4. בידוד הנעלם ומציאתו ע"י חילוק במקדם שלו.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות ממעלה ראשונה):

- | | |
|-----------------------------|---------------------------------------|
| א. $6x + 2 = 8$ | ב. $7 - 2x = 7$ |
| ג. $2x + x = 24$ | ד. $2x + 6 = 8 + x$ |
| ה. $-7x + 5 + 2x = 4x - 13$ | ו. $6x - 3 + 5 - 7x = x - 5x - 7$ |
| ז. $2 - 5x + 7 = -3x + 8$ | ח. $x - 2 + 5x = 4 - 3x - 5 + 7x + 7$ |

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם פתיחת סוגריים):

- | | |
|------------------------------|-------------------------------------|
| א. $3(x - 1) - 4 = 2$ | ב. $7x - 4(3 - 4x) = -x$ |
| ג. $6(4 - x) - (6 - x) = 3x$ | ד. $5x - (3x - 7)4 = 21$ |
| ה. $x(x - 5) = x^2 - 7x + 8$ | ו. $(7 - x)(1 - x) - (x - 3)^2 = 0$ |

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה מספרי):

א. $\frac{x}{3} - \frac{x}{9} = -4$ ב. $\frac{4x}{15} - \frac{3x}{10} = 1$ ג. $\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}x = x - \frac{7}{15}$ ד. $\frac{5x+1}{6} - \frac{6x-1}{5} = \frac{3x+1}{4} - 1$ ה. $\frac{2}{5}(x-3) - \frac{3}{15}(4-x) = x+2$ ו. $5\left(\frac{x}{3} - \frac{x}{7}\right) - x = 1$	א. $\frac{1}{4} - \frac{2}{x} = 0$ ב. $\frac{1}{2} - \frac{x}{x-1} = 0$ ג. $\frac{3}{x} = \frac{1}{x+2}$ ד. $\frac{5}{2x-1} = \frac{4}{3x+2}$ ה. $\frac{x+5}{3x^2} - \frac{1}{6x} = \frac{1}{x}$ ו. $\frac{1}{4x} + \frac{3}{x} = \frac{13}{2}$
---	---

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם נעלם במכנה):

(5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם מכנה משותף ע"י פירוק לגורמים):

א. $\frac{x^2+2}{3x^2+5x} = \frac{3x-1}{9x+15}$ ב. $\frac{7}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{2-2x} = 0$ ג. $\frac{3}{(2-x)^2} + \frac{5}{12-3x^2} = 0$ ד. $\frac{4x^2-24x+36}{x-3} = 12$	א. $\frac{1}{4} - \frac{2}{x} = 0$ ב. $\frac{1}{2} - \frac{x}{x-1} = 0$ ג. $\frac{3}{x} = \frac{1}{x+2}$ ד. $\frac{5}{2x-1} = \frac{4}{3x+2}$ ה. $\frac{x+5}{3x^2} - \frac{1}{6x} = \frac{1}{x}$ ו. $\frac{1}{4x} + \frac{3}{x} = \frac{13}{2}$
--	---

תשובות סופיות:

- | | | | | | |
|------------|--------------------|---------------------|--------------------|------------|--------------------|
| א. $x=1$ | ב. $x=0$ | ג. $x=8$ | ד. $x=2$ | ה. $x=2$ | ו. $x=-3$ |
| א. $x=3$ | ב. $x=\frac{1}{2}$ | ג. $x=2\frac{1}{4}$ | ד. $x=1$ | ה. $x=4$ | ו. $x=-1$ |
| א. $x=-18$ | ב. $x=-30$ | ג. $x=-1$ | ד. $x=1$ | ה. $x=-10$ | ו. $x=-21$ |
| א. $x=8$ | ב. $x=-1$ | ג. $x=-3$ | ד. $x=-2$ | ה. $x=2$ | ו. $x=\frac{1}{2}$ |
| א. $x=-6$ | ב. $x=-7$ | ג. $x=-7$ | ד. $x=6, x \neq 3$ | | |

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

הגדרה:

מערכת שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה (ליניאריות) היא מהצורה הבאה:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

כאשר a_1, b_1, c_1 ו- a_2, b_2, c_2 הם מקדמים מספריים.

$$\cdot \begin{cases} y = 3x - 1 \\ \frac{x+3}{2} = y + 6 \end{cases}, \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} : \text{דוגמאות למערכות של משוואות}$$

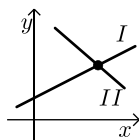
פתרון של מערכת משוואות:

פתרון של מערכת המשוואות הוא זוג סדור המקיים את כל המשוואות שבמערכת.

הצגה גרפית של מערכת משוואות:

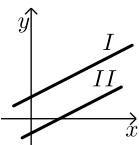
פתרון גרפי של מערכת משוואות הוא נקודת החיתוך של הישרים המייצגים כל משוואה.

יתכנו שלושה מצבים הדדיים בין שני ישרים:



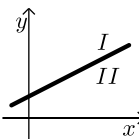
- הישרים נחתכים:

במקרה זה נקודת החיתוך תהיה פתרון המערכת.



- הישרים מקבילים:

במקרה זה לא יהיה פתרון למערכת.



- הישרים מתלכדים:

במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות למערכת המשוואות.

פתרון אלגברי של מערכת משוואות:

- פתרון ע"י שיטת ההצבה:
נבודד את אחד הנעלמים ממשוואה אחת ונציב אותו במשוואה השנייה.
נבחר בשיטה זו במקרים בהם קל לבודד נעלם באחת המשוואות.
- פתרון ע"י השוואת מקדמים:
1. כופלים (או מחלקים) משוואה אחת (או שתיהן) במספר השונה מאפס כך שתתקבלנה משוואות שקולות בעלות מקדמים נגדיים או זהים עבור אחד המשתנים.
2. מחברים (או מחסרים) את המשוואות ומקבלים משוואה חדשה עם נעלם אחד.
3. מוצאים את ערך הנעלם מהמשוואה החדשה ומציבים אותו באחת המשוואות המקוריות למציאת ערך הנעלם השני.

הערה:

נוח להשתמש בשיטת השוואת המקדמים ע"י כך שמעבירים את המערכת הנתונה למערכת שקולה שבה המשתנים באגף אחד והמספר החופשי באגף השני.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

$\begin{cases} -3x + 2y = -16 \\ x = 5y + 14 \end{cases}$.ג.	$\begin{cases} y = x - 3 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$.ב.	$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ y = 5 \end{cases}$.א.
$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 7y = 11 \end{cases}$.ו.	$\begin{cases} -5x + 7y = -26 \\ x + 3y = -8 \end{cases}$.ה.	$\begin{cases} 5x - 2y = -2 \\ x + 4y = 4 \end{cases}$.ד.

(2) פתור את המשוואות הבאות:

$\begin{cases} 5x + 2y = 14 \\ 5x + 3y = 23 \end{cases}$.ב.	$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x - 3y = 3 \end{cases}$.א.
$\begin{cases} 4x = 3y - 29 \\ 5y = 9 - 13x \end{cases}$.ד.	$\begin{cases} 5y = 2x \\ 4x = 5y + 8 \end{cases}$.ג.

(3) פתור את המשוואות הבאות:

$\begin{cases} 2(x - y) + 4y = 1 + x \\ 2 - 7y + x = 3(x - y) \end{cases}$.ב.	$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 4x + 8y = 5 \end{cases}$.א.
--	---

(4) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} \frac{x-3}{8} - \frac{x+y}{16} = \frac{y-1}{4} \\ 3(2x-y) - 4x - 11 = 0 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} 3y - x + 2 = 4x + 2 - 3y \\ 2x - 3 - y = 5y - 4x + 3 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} \frac{3x-1}{4} - \frac{2}{5}(x-y) = \frac{3}{10}(x+3) \\ \frac{x+1}{4} - \frac{y}{2} = 1 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

(5) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 4x - \frac{7}{y} = -3 \\ 5x + \frac{2}{y} = 7 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{3}{y} = 2 \\ \frac{9}{x} - \frac{4}{y} = -7 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 4 \\ \frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4 \end{cases} \quad \text{א.}$$

(6) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} xy = 20 \\ y(3x-4) = 20 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} x(y+2) + y = xy - 5 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} 5x - 4xy = 22 \\ 6x + xy = -20 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

תשובות סופיות:

(1) א. (2,5) ב. (-7,-10) ג. (4,-2) ד. (0,1) ה. (1,-3) ו. (-2,3).

(2) א. $(4, \frac{1}{3})$ ב. $(-\frac{4}{5}, 9)$ ג. (4,1.6) ד. (-2,7).

(3) א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות.

(4) א. (6,5) ב. (7,1) ג. (7,2).

(5) א. (1,1) ב. (-3,1) ג. (1,1).

(6) א. (-1,-3) ב. (2,10) ג. (-2,4).

משוואות עם אינסוף פתרונות וללא פתרון:

סיכום כללי:

משוואה ממעלה ראשונה:

למשוואה ממעלה ראשונה מהצורה: $ax = b$ יתכן פתרון יחיד אם ורק אם $a \neq 0$

מכיוון שניתן לחלק ולכתוב: $x = \frac{b}{a}$.

כאשר $a = 0$ מתקבלת המשוואה $0 \cdot x = b$ ויתכנו שני מצבים:

1. אם $b = 0$ את המשוואה היא $0x = 0$ ויש אינסוף פתרונות המקיימים אותה.
2. אם $b \neq 0$ את המשוואה היא $0x = b \neq 0$ ואין אף ערך של x המקיים אותה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$(1) \quad x + 4 = 6 + x \quad (2) \quad 3x + 6 - x = 4 + 2x + 2$$

$$(3) \quad 6(x - 2) = 2x + 5 + 4x \quad (4) \quad 5x - 3 + x = 4x + 2x - 3$$

$$(5) \quad \text{נתונה המשוואה: } 3 - 2(x + 2) = 5x + \square$$

- א. איזה מספר יש להציב ב- $\square$ על מנת שפתרון המשוואה יהיה 1?
- ב. איזה מספר יש להציב ב- $\square$ על מנת שפתרון המשוואה יהיה 0?
- ג. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב- $\square$ על מנת שלמשוואה יהיו אינסוף פתרונות.
- ד. מצא ביטוי אלגברי שיש להציב ב- $\square$ על מנת שלמשוואה לא יהיה פתרון.

תשובות סופיות:

- (1) אף פתרון.
- (2) אינסוף פתרונות.
- (3) אין פתרון.
- (4) אינסוף פתרונות.
- (5) א. -8 ב. -1 ג. $-7x - 1$
ד. $-7x + k$ כאשר k הוא מספר כלשהו השונה מ-1.

משוואה ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

משוואה מהצורה: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), נקראת משוואה ריבועית.
פתרונות המשוואה יסומנו ב- x_1 ו- x_2 ויחושבו לפי נוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

למשוואה ריבועית יתכנו שלושה סוגים של פתרונות:

- משוואה עם שני פתרונות ממשיים שונים.**
אם מתקבל מספר חיובי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיו שני פתרונות ממשיים שונים.
דוגמא: $x^2 + 5x - 4 = 0$.
- משוואה עם פתרון ממשי אחד בלבד.**
אם מתקבל אפס בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה יהיה פתרון ממשי אחד בלבד.
דוגמא: $x^2 + 4x + 4 = 0$.
- משוואה ללא פתרונות ממשיים כלל.**
אם מתקבל מספר שלילי בתוך השורש שבנוסחת השורשים אזי למשוואה לא יהיו פתרונות ממשיים כלל.
דוגמא: $x^2 + x + 4 = 0$.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

ב. $-x^2 + 10x - 16 = 0$

א. $x^2 + 3x - 10 = 0$

ד. $2x^2 - 6x + 5 = 0$

ג. $25x^2 - 20x + 4 = 0$

(2) פתור את המשוואות הבאות:

ב. $-x(x-5) = (1-3x)(1-x) + 4$

א. $4x^2 - 5x + 7 = 4 - x^2 + 13$

ד. $(2x-1)^2 + x(2x+3) = (x-1)(x-7)$

ג. $2(x-5)^2 - (2x-3)^2 = 10x + 21$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת b):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } x^2 - 36 = 0 & \text{ב. } 32x^2 - 18 = 0 \\ \text{ג. } 4x - x(x+2) = 3(x-1) - x - 6 & \text{ד. } (2x-1)^2 + (2x+1)^2 = 10 \end{array}$$

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואה חסרת c):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } -7x^2 - 14x = 0 & \text{ב. } 5x^2 - x = 0 \\ \text{ג. } 6x(x-2) - 1 = 4x - 3(x+1) + 2 & \text{ד. } (5x-2)^2 = (x-2)(x+3) + 10 \end{array}$$

(5) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א. } \frac{4x+1}{3} - \frac{x+2}{2} = \frac{2}{x} & \text{ב. } \frac{x^2-9}{x+3} + x = x^2 - 18 \\ \text{ג. } \frac{3}{2x+2} - \frac{2x-5}{2(x-1)^2} - \frac{4}{1-x^2} = 0 & \text{ד. } \frac{x}{2x^2-72} + \frac{2}{x^2+12x+36} = \frac{8x-15}{24-4x} + 2 \end{array}$$

תשובות סופיות:

- (1) א. $x_1 = 2, x_2 = -5$ ב. $x_1 = 2, x_2 = 8$ ג. $x = \frac{2}{5}$ ד. אין פתרון.
- (2) א. $x_1 = 2, x_2 = -1$ ב. $x_1 = 1, x_2 = 1\frac{1}{4}$ ג. $x_1 = 1, x_2 = -10$ ד. $x_1 = 0.6, x_2 = -2$
- (3) א. $x = \pm 6$ ב. $x = \pm \frac{3}{4}$ ג. $x = \pm 3$ ד. $x = \pm 1$
- (4) א. $x_1 = 0, x_2 = -2$ ב. $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{5}$ ג. $x_1 = 0, x_2 = 2\frac{1}{6}$ ד. $x_1 = 0, x_2 = \frac{7}{8}$
- (5) א. $x_1 = 2, x_2 = -1.2$ ב. $x = 5, x \neq -3$ ג. $x_1 = 0, x_2 = -5$ ד. $x_1 = -7.6, x_2 = -4\frac{2}{7}$

משוואות דו-ריבועיות:

סיכום כללי:

משוואה דו-ריבועית היא משוואה מהצורה: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ כאשר הנעלם הוא x .
פתרון המשוואה יבוצע ע"י מעבר לפרמטר: $x^2 = t \rightarrow at^2 + bt + c = 0$ ומציאתו.
לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה ולמצוא את ערכי x .

ניתן להביא משוואות לצורה זו ולהגדיר ביטוי המופיע בחזקות 2 ו-4 כגון: $(x^2 - 1)^2 + 3(x^2 - 1) - 2 = 0$ באמצעות פרמטר: $t = x^2 - 1$
ובכך לפתור משוואה: $t^2 + 3t - 2 = 0$ ולהחזיר את ההצבה עבור מציאת x .
דרך הפתרון תקפה לכל משוואה בה הנעלם מופיע בחזקות כפולות כגון 3 ו-6, או 4 ו-8.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- (1) $5x^4 + 3x^2 - 8 = 0$
- (2) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$
- (3) $13x^2(3x^2 - 1) - 2 = 3(x^2 - 1)(x^2 + 1)$
- (4) $x^2(x^2 + 1) = 10(3x^2 - 10)$
- (5) $x^6 + x^3 = 56$
- (6) $x^3 + 4 = \frac{32}{x^3}$
- (7) $x - 9\sqrt{x} + 14 = 0$
- (8) $x^8 - 4x^4 - 50 = 31x^4 - 84$
- (9) $125x^6 - 1 = 124(x^6 + x^3 + 1)$
- (10) $(2x^2 - x)^2 - 4(2x^2 - x) + 3 = 0$
- (11) $(x^2 + 2x)^2 + 7x^2 + 14x = -6$
- (12) $\frac{21}{x^2 - 4x + 10} = 6 + x^2 - 4x$
- (13) $\frac{12}{x^2 + 2x - 8} = 1 + \frac{7.5}{x^2 + 2x - 3}$
- (14) $\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{7}{6} - \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2}$
- (15) $\frac{3}{3x^2 - 15} + \frac{1}{x^2 + 5} = \frac{10}{x^4 - 25}$
- (16) $\frac{x^2 - 1}{4x^2 - 28} + 2 = \frac{9}{x^4 - 8x^2 + 7} + \frac{x^2}{2x^2 - 2}$
- (17) $\left(2x + \frac{3}{x}\right)^2 + 35 = 12\left(2x + \frac{3}{x}\right)$
- (18) $\frac{3x^4}{(x+2)^2} + \frac{3x^2}{x+2} = 6$
- (19) $(2x - x^2 + 3)(2x - x^2 - 2) = 0$
- (20) $(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 5x - 8) = -24$

תשובות סופיות:

(1) $x = \pm 1$

(2) $x = \pm 1, \pm \sqrt{2}$

(3) $x = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}$

(4) $x = \pm 2, \pm 5$

(5) $x_1 = \sqrt[3]{7}, x_2 = -2$

(6) $x = -2, \sqrt[3]{4}$

(7) $x = 49$

(8) $x_{1,2} = \pm \sqrt[4]{34}, x_{3,4} = \pm 1$

(9) $x = 5, -1$

(10) $x_1 = 1.5, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = -\frac{1}{2}$

(11) $x = -1$

(12) $x_{1,2} = 1, 3$

(13) $x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 3.06, x_4 = -5.06$

(14) $x_1 = 0, x_2 = -2$

(15) אין פתרונות.

(16) $x = \pm \sqrt{\frac{3}{7}}$

(17) $x = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 3$

(18) $x = -1, 2$

(19) $x = 3, -1$

(20) $x = \pm 1, 4, 6$

משוואות עם פרמטרים:

סיכום כללי:

משוואה עם פרמטר הינה משוואה שמכילה שני סוגים של גדלים – משתנים ופרמטרים. את המשתנים מקובל לסמן באותיות x , y , z ואת הפרמטרים מסמנים בשאר האותיות. פתרון המשוואה יתקבל ע"י בידוד המשתנה כך שיבוטא באמצעות הפרמטר/ים שבמשוואה.

למשל פתרון המשוואה: $mx = 4$ (כאשר x הוא הנעלם ו- m הוא פרמטר) הוא $x = \frac{4}{m}$

אשר מבוטא באמצעות הפרמטר m .

בכתיבת פתרון של משוואה עם פרמטרים יש לציין את תחום ההגדרה של הפרמטר עבורו הפתרון הוא בעל משמעות. בדוגמא הנ"ל תחום ההגדרה הוא $m \neq 0$.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות:

$$\text{א. } 3x - b = (b+1)x - 6 \quad \text{ב. } \frac{1}{3}(a - 3x) = \frac{1}{a}(ax - 3)$$

$$\text{ג. } (x - 2a)(x - 2b) = x^2 - 2(a^2 + b^2) \quad \text{ד. } \frac{m+1}{x-1} = \frac{m-1}{x+1}$$

$$\text{ה. } \frac{x}{a^2 - a} - \frac{1}{2a} = \frac{ax + x}{2a^3 - 4a^2 + 2a} - \frac{2}{a^3 - 2a^2 + a}$$

(2) פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\text{א. } \begin{cases} x + my = 1 \\ x + y = m \end{cases} \quad \text{ב. } \begin{cases} ax + y = 2 \\ x + ay = 4 \end{cases}$$

$$\text{ג. } \begin{cases} \frac{x}{m} + y = m \\ x - m^2 y = 1 \end{cases} \quad \text{ד. } \begin{cases} (m-1)x - (2m+3)y = 5 \\ (m+2)x - (2m-1)y = 10m \end{cases}$$

$$\text{ה. } \begin{cases} (2a+b)x - (2a-b)y = 8ab \\ (2a-b)x + (2a+b)y = 8a^2 - 2b^2 \end{cases}$$

(3) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות :

$$\text{א. } x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \quad \text{ב. } x^2 - 2x + 4a = a^2 + 3$$

$$\text{ג. } x^2 + m(x+10) = 2m^2 - 5x \quad \text{ד. } \frac{1}{a-x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+x} = 0$$

$$\text{ה. } (m^2 + 1)x^2 - m^2x - 1 = 0 \quad \text{ו. } \frac{a}{x} + \frac{1}{b} = \frac{x}{a} + b$$

$$\text{ז. } x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$$

תשובות סופיות:

$$(1) \text{ א. } x = \frac{b-6}{2-b}, b \neq 2 \quad \text{ב. } x = \frac{a^2+9}{6a}, a \neq 0 \quad \text{ג. } x = a+b \quad \text{ד. } x = -m \quad \text{ה. } x = a+1$$

$$(2) \text{ א. } m \neq 1, (m+1, -1) \quad \text{ב. } a \neq \pm 1, \left(\frac{2a-4}{a^2-1}, \frac{4a-2}{a^2-1} \right)$$

$$\text{ג. } m \neq 0-1, \left(m^2 - m + 1, \frac{m-1}{m} \right) \quad \text{ד. } m \neq 1, -2, (2m+1, m-2)$$

$$\text{ה. } b \neq \pm 2a, (2a+b, 2a-b)$$

$$(3) \text{ א. } x = m+1, m-1 \quad \text{ב. } x = a-1, 3-a \quad \text{ג. } x = m-5, -2m$$

$$\text{ד. } a \neq 0, x \neq \pm a, x = \pm a\sqrt{3} \quad \text{ה. } x = 1, -\frac{1}{m^2+1}$$

$$\text{ו. } a, b \neq 0, x = \frac{a}{b}, -ab \quad \text{ז. } a \neq \pm b, x = \frac{a+b}{a-b}, \frac{a-b}{a+b}$$

משוואות עם שורשים:

סיכום כללי:

פתרון משוואה מהצורה: $\sqrt{x} = a$ יתקבל ע"י העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה באופן הבא: $x = a^2 \rightarrow (\sqrt{x})^2 = (a)^2$.

הערות:

- (1) יש לזכור בעת העלאה בריבוע של שני אגפי המשוואה יש לבדוק את כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבתם במשוואה המקורית.
- (2) למשוואה מהצורה $\sqrt{x} = a$ שבה $a < 0$ אין פתרון.
- (3) יש לסדר תחילה משוואות שבהן הביטוי עם שורש אינו מבודד.
- (4) במשוואות שבהן יותר מביטוי אחד עם שורש יש לבודד תחילה את אחד הביטויים, להעלות בריבוע ולאחר מכן לחזור על התהליך ולבצע העלאה בריבוע פעם נוספת.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- | | |
|--|---|
| (2) $\sqrt{x+2} = x$ | (1) $\sqrt{2x+5} = 7$ |
| (4) $\sqrt{2x+7} + 4 = x$ | (3) $\sqrt{3x+1} + x = 13$ |
| (6) $\sqrt{10x+6} + 9 = x$ | (5) $\sqrt{x-1} + 3 = x$ |
| (8) $\sqrt{24-x} + 3 = 2x$ | (7) $\sqrt{x+6} - 2 = 2x$ |
| (10) $2x = 16 - 3\sqrt{x-1}$ | (9) $\sqrt{x+16} + 4 = 2x$ |
| (12) $\sqrt{x^2 - 5x + 12} = 2\sqrt{6-x}$ | (11) $\sqrt{3x+5} = \sqrt{x+17}$ |
| (14) $\sqrt{2x-1} + 3 = \sqrt{7x+1}$ | (13) $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2x-5} = \sqrt{11-x^2}$ |
| (16) $\sqrt{2x-3} + \sqrt{3-x} = 2$ | (15) $\sqrt{9x-8} - 3\sqrt{x+4} = -2$ |
| (18) $\sqrt{2x-2} + \sqrt{5x-4} = \sqrt{3x-2}$ | (17) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = \sqrt{4x+1}$ |
| | (19) $3\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3} = 2\sqrt{x+2}$ |

תשובות סופיות:

- | | |
|---------------------------|---------------|
| $x = 2$ (2 | $x = 22$ (1 |
| $x = 9$ (4 | $x = 8$ (3 |
| $x = 25$ (6 | $x = 5$ (5 |
| $x = 3.75$ (8 | $x = 0.25$ (7 |
| $x = 5$ (10 | $x = 4.25$ (9 |
| $x = 4, -3$ (12 | $x = 6$ (11 |
| $x = 5$ (14 | $x = 3$ (13 |
| $x = 2, 2\frac{8}{9}$ (16 | $x = 12$ (15 |
| $x = 1$ (18 | $x = 6$ (17 |
| | $x = 2$ (19 |

משוואות עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

הגדרה:

ערך מוחלט הינו המרחק של מספר מ-0 ומוגדר באופן הבא: $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$.

משוואה עם ערך מוחלט:

משוואה עם ערך מוחלט היא מהצורה: $|x| = a$.

כדי לפתור משוואה עם ערכים מוחלטים יש למצוא את נקודות האפס של כל ערך מוחלט (קרי: הנקודות בהן הביטוי שבתוך הערך המוחלט מתאפס) ולפצל את המשוואה הנתונה לתחומים עבור כל תחום.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

- | | |
|-----------------------------|---------------------------|
| $ 3x-24 =x$ (2) | $ 3x+14 =7$ (1) |
| $2x- 8-x =10$ (4) | $ 12-x =3x$ (3) |
| $ 14-3x =2 x+5 $ (6) | $ 4x-5 = 2x+13 $ (5) |
| $ x+2 +6= 2x-4 $ (8) | $ x +7= 2x $ (7) |
| $ 10-3x - x+4 = 2x-6 $ (10) | $ x+2 + 2x-6 = 4x+8 $ (9) |

תשובות סופיות:

- | | | | |
|---------------------------|---------------|-------------------------|--------------------------|
| $x=6$ (4) | $x=3$ (3) | $x=6,12$ (2) | $x=-\frac{7}{3}, -7$ (1) |
| $x=12, -1\frac{1}{3}$ (8) | $x=\pm 7$ (7) | $x=24, \frac{4}{5}$ (6) | $x=9, -1\frac{1}{3}$ (5) |
| | | $x=0$ (10) | $x=0, -12$ (9) |

מערכת משוואות ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

מערכת משוואות ריבועיות מיוחסת למערכת של שתי משוואות (לפחות) שאחת מהן מכילה את אחד מהנעלמים בריבוע. למערכת משוואות ריבועיות יכולים להתקבל עד 4 פתרונות שונים. יש לפתור את המערכת לפי הטכניקות הרגילות של בידוד והצבה או השוואת מקדמים.

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 36 \\ x^2 + 3y = 10 \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y = 6 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 17 \\ xy = -10 \end{cases} \quad (4) \qquad \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 16 \\ 5x^2 - 3y^2 = 17 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 8y^2 = 8 \\ 3xy - 2y^2 = 4 \end{cases} \quad (6) \qquad \begin{cases} x^2 - xy - 20y^2 = 0 \\ x + 6y = 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} 16x^2 - y^2 = 391 \\ 4x - y = 23 \end{cases} \quad (8) \qquad \begin{cases} x^2 - y^2 = 33 \\ x + y = 11 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{4}{y} - \frac{1}{x} = -19 \end{cases} \quad (10) \qquad \begin{cases} 4xy + x = -15 \\ \frac{3}{y} - 2x = 16 \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} xy = 24 \\ (y-x)^2 - 7(y-x) + 10 = 0 \end{cases} \quad (12) \qquad \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 21 \\ \frac{8}{x} - \frac{1}{y} = 13 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{10}{3} \\ x^2 + y^2 = 9xy + 25 \end{cases} \quad (14) \qquad \begin{cases} x^2y - xy^2 = 84 \\ x^2 - 2xy + y^2 + 5x - 5y = 24 \end{cases} \quad (13)$$

תשובות סופיות:

- (1) $(2,4), (4,2)$
- (2) $(\pm 4, -2)$
- (3) $(\pm 2, \pm 1)$
- (4) $(5, -2), (-5, 2)$
- (5) $\left(-2, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{11}, \frac{1}{11}\right)$
- (6) $\left(3, \frac{1}{2}\right), \left(-3, -\frac{1}{2}\right), (2, 1), (-2, -1)$
- (7) $(7, 4)$
- (8) $(5, -3)$
- (9) $\left(-5, \frac{1}{2}\right), \left(-24, -\frac{3}{32}\right)$
- (10) $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right)$
- (11) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$
- (12) $(4, 6), (-6, -4), (3, 8), (-8, -3)$
- (13) $(-1.65, 6.35), (-6.35, 1.65), (7, 4), (-4, -7)$
- (14) $(5, 45), (-5, -45), (45, 5), (-45, -5)$

משוואות מסכמות מתקדמות:

סיכום כללי:

תזכורת מהירה:

- משוואה דו-ריבועית יכולה להופיע בכל תצורה (עם שורשים, עם ערכים מוחלטים וכו'). העיקרון הוא זיהוי תבנית של הנעלם אשר חוזרת על עצמה לאורך המשוואה. סימון התבנית במשתנה זמני ופתרון עבור משתנה זה תוביל למשוואה מוגדרת ופתירה. לאחר מכן יש להחזיר את ההצבה לתבנית של המשתנה המקורי ולמצוא את ערכיו.
- דרך הפתרון של משוואה עם שורשים היא ע"י בידוד השורש והעלאה בריבוע. במידה ויש יותר משורש אחד המופיעים בחיבור/חיסור יש לבצע את הפעולה פעמיים. חשוב לוודא נכונות של כל הפתרונות המתקבלים ע"י הצבה במשוואה המקורית לפני ההעלאות בריבוע.
- דרך הפתרון של משוואה עם ערכים מוחלטים היא ע"י פיצול המשוואה לתחומים לפי סימני הערך המוחלט. זאת יש לבצע ע"י איפוס הביטוי שבכל ערך מוחלט ומציאת ערכי הנעלם המקיימים זאת, חלוקת המשוואה לתחומים מתאימים ופתרונה בכל תחום. יש לזכור לבדוק האם הפתרון המתקבל נמצא בתחום הפתרון – במידה וכן הוא פתרון של המשוואה, אחרת הוא נפסל.
- משוואה עם פרמטר/ים נפתרת בצורה רגילה (התייחסות לפרמטר/ים כאל קבועים מספריים) כאשר יש לציין את תחומי ההגדרה שלהם. יש לבדוק פתרונות שמתקבלים המבוטאים באמצעות הפרמטר/ים במידה וקיימת הגבלת תחום הגדרה במשוואה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll}
 (1) & x + \sqrt{x+6} - 6 = 0 \\
 (2) & x^2 + 5x - \sqrt{x^2 + 5x} - 30 = 0 \\
 (3) & 4x^2 + 16x - 4\sqrt{x^2 + 4x} - 3 = 0 \\
 (4) & 2x^2 + 6x - \sqrt{x^2 + 3x + 5} = 5 \\
 (5) & x^2 - \sqrt{16x^2 + 48} + 7 = 0 \\
 (6) & x^2 - \sqrt{6x^2 - 15} = 1 \\
 (7) & \frac{x^2}{\sqrt{3x-2}} - \sqrt{3x-2} = 1-x \\
 (8) & \frac{\sqrt{x^2 + 4x - 12}}{\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+5} = \frac{7}{\sqrt{x-1}} \\
 (9) & \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x-2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3} \\
 (10) & \sqrt{x + \sqrt{14x - 49}} + \sqrt{x - \sqrt{14x - 49}} = \sqrt{14} \\
 (11) & \sqrt{x+6+6\sqrt{x-3}} - \sqrt{x+6-6\sqrt{x-3}} = 2 \\
 (12) & \frac{4}{x + \sqrt{x^2 + x}} - \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + x}} = \frac{3}{x}
 \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות עבור $a > 0$:

$$\begin{array}{ll}
 (13) & x^2 + ax - 2a\sqrt{x^2 + ax - a^2} = 0 \\
 (14) & x^2 + ax - 2a\sqrt{3x^2 + 3ax - 9a^2} = 0
 \end{array}$$

פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll}
 (15) & |3 - |2 - x| + |x|| = 1 \\
 (16) & |4 - |5 - x|| = |x + 3| \\
 (17) & \left| \frac{x + |3 - x|}{x + 2} \right| = 18 \\
 (18) & \sqrt{25 + |16x^2 - 25|} = 4 + 4|x + 1| \\
 (19) & \frac{x^3 - 5x}{\sqrt{2x^2 - 4x - 1} - |x| + 2} = 0
 \end{array}$$

$$(20) \quad \text{הראה כי אין פתרון למשוואה הבאה: } \frac{|x+2|}{|x|+2} = |2-x|+2$$

תשובות סופיות:

$$x = 3 \quad (1)$$

$$x_1 = 4, x_2 = -9 \quad (2)$$

$$x_1 = 0.5, x_2 = -4.5 \quad (3)$$

$$x_1 = 1, x_2 = -4 \quad (4)$$

$$x_{1,2} = \pm 1 \quad (5)$$

$$x_{1,2} = \pm 2 \quad (6)$$

$$. x = 1 \quad (7)$$

$$. x = 3 \quad (8)$$

$$. x = 2 \quad (9)$$

$$. 3.5 \leq x \leq 7 \quad (10)$$

$$. x = 4 \quad (11)$$

$$. x = 1, x = \frac{9}{16} \quad (12)$$

$$x_1 = -2a, x_2 = a \quad (13)$$

$$x_1 = -2a, x_2 = 3a \quad (14)$$

$$. x \leq 0 \quad (15)$$

$$. x = -1 \quad (16)$$

$$. x = -\frac{39}{18}, -\frac{33}{18} \quad (17)$$

$$. x \leq \frac{5}{4}, x = -\frac{1}{4} \quad (18)$$

$$. x = -\sqrt{5} \quad (19)$$

$$(20) \text{ שאלת הוכחה.}$$

ביטויים ומשוואות ממעלה שלישית:

סיכום כללי:

נוסחאות הכפל המקוצר ממעלה שלישית:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

שאלות:

פישוט ביטויים:

פשט את הביטויים הבאים:

$$(2y+5)^3 \quad (2)$$

$$(x-3)^3 \quad (1)$$

$$8y^3 + 343 \quad (4)$$

$$8x^3 - 1 \quad (3)$$

$$x^3y^6z^9 - 1 \quad (6)$$

$$a^6 - 27 \quad (5)$$

$$64mn^4 - 8m^4n^7 \quad (8)$$

$$11 + 88x^{12} \quad (7)$$

$$\frac{x^3 + 64}{x^2 + 4x} \quad (10)$$

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8} \quad (9)$$

משוואות בנעלם אחד עם נוסחאות הכפל המקוצר:

פתור את המשוואות הבאות:

$$125x^3 = 1 - 15x + 75x^2 \quad (12)$$

$$x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = 0 \quad (11)$$

$$x^3 - 7x - 6 = 0 \quad (14)$$

$$x^3 + x - 30 = 0 \quad (13)$$

משוואות בנעלם אחד עם פירוקים שונים:

פתור את המשוואות הבאות:

$$2x^3 + 5x^2 - 2x - 5 = 0 \quad (16)$$

$$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0 \quad (15)$$

מערכת משוואות:

$$(17) \quad \begin{cases} x^3 + y^3 = 243 \\ x + y = 9 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(18) \quad \begin{cases} x^3 - y^3 = 91 \\ x^2y - xy^2 = 30 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

תשובות סופיות:

$$8y^3 + 60y^2 + 150y + 125 \quad (10)$$

$$(2y + 7)(4y^2 - 17y + 49) \quad (11)$$

$$(xy^2z^3 - 1)(x^2y^4z^6 + xy^2z^3 + 1) \quad (12)$$

$$8mn^4(2 - mn)(4 + 2mn + m^2n^2) \quad (13)$$

$$\frac{x^2 - 4x + 16}{x} \quad (14)$$

$$x = \frac{1}{2} \quad (15)$$

$$x_{1,2,3} = -2, -1, 3 \quad (16)$$

$$x_{1,2,3} = -2.5, -1, 1 \quad (17)$$

$$(-5, -6), (6, 5) \quad (18)$$

$$x^3 - 9x + 27x - 27 \quad (1)$$

$$(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) \quad (2)$$

$$(a^2 - 3)(a^4 + 3a^2 + 9) \quad (3)$$

$$8(1 + 2x^4)(1 - 2x^4 + 4x^8) \quad (4)$$

$$\frac{1}{x + 2} \quad (5)$$

$$x = 4 \quad (6)$$

$$x = 3 \quad (7)$$

$$x_{1,2,3} = \frac{1}{2}, 1, 2 \quad (8)$$

$$(3, 6), (6, 3) \quad (9)$$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי א

פרק 3 - אי שוויונים אלגבריים

תוכן העניינים

1. אי שוויונים ממעלה ראשונה 69
2. אי שוויונים ממעלה שנייה 71
3. אי שוויונים ממעלה שלישית 72
4. אי שוויונים עם מנה 73
5. אי שוויונים כפולים מערכות וגם ואו 75
6. שאלות מסכמות 76
7. אי שוויונים עם שורשים 78
8. מציאת תחום הגדרה 80
9. אי שוויונים עם ערך מוחלט 82

אי-שוויונים ממעלה ראשונה:

סיכום כללי:

פעולות המותרות לביצוע בפתרון אי-שוויון:

- לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
- להעלות בחזקה אי זוגית.
- להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

פעולות אסורות לביצוע בפתרון אי-שוויון:

- לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
- להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- | | |
|---|---|
| $6x > 2(3x-1)$ (2) | $45x - 26 > 109$ (1) |
| $(x-2)^2 + 4 < (x+2)^2 + 20$ (4) | $2(x-5) \geq \frac{1}{2}(4x+6)$ (3) |
| $4(6x-8) < 8(3x-4)$ (6) | $\frac{8x-4}{2} < \frac{9(x+1)}{3}$ (5) |
| $\frac{7-x}{10} - \frac{3x-1}{5} + \frac{x+4}{3} < 7$ (8) | $\frac{x-6}{3} - \frac{x-4}{4} \geq 12-x$ (7) |

תשובות סופיות:

(1) $x > 3$

(2) כל x

(3) אף x

(4) $x > -2$

(5) $x < 5$

(6) אף x

(7) $x \geq 12$

(8) $x > -13$

אי-שוויונים ממעלה שנייה:

סיכום כללי:

אי שוויון ריבועי הוא מהצורה: $ax^2 + bx + c \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$ כאשר $a \neq 0$.

כדי לפתור אי שוויון ריבועי יש למצוא את נקודות האפס של הביטוי הריבועי ולאחר מכן למצוא את תחום ההצבה עבורו הביטוי מקיים את אי השוויון עצמו.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- | | |
|------------------------------|--|
| $x^2 - 12x > -32$ (2) | $x^2 < 144$ (1) |
| $(x+2)(x+4) < 35$ (4) | $(x+2)(x+5) < 0$ (3) |
| $(x-3)(x-7) \geq 8x-56$ (6) | $-x^2 + 13x + 30 < 0$ (5) |
| $(5x+6)^2 \leq 4(x-3)^2$ (8) | $(x-5)^2 + x(x+2) < 89$ (7) |
| $x^2 - 10x + 25 > 0$ (10) | $-3x^2 + 12x > 0$ (9) |
| $2x^2 + 2x + 24 \geq 0$ (12) | $(x-3)^2 > (x-1)(x+6) - x^2 - 3x$ (11) |

תשובות סופיות:

- | | |
|---------------------------|----------------------|
| $x < 4, x > 8$ (2) | $-12 < x < 12$ (1) |
| $-9 < x < 3$ (4) | $-5 < x < -2$ (3) |
| $x \leq 7, x \geq 11$ (6) | $x < -2, x > 15$ (5) |
| $-4 \leq x \leq 0$ (8) | $-4 < x < 8$ (7) |
| $x > 5, x < 5$ (10) | $0 < x < 4$ (9) |
| x כל (12) | $x < 3, x > 5$ (11) |

אי-שוויונים ממעלה שלישית:

סיכום כללי:

אי שוויונים ממעלה גבוהה מיוחסים לכאלה שניתן לכתוב אותם בצורה של פולינומים, כגון: $x^3 - 4x^2 + 4x + 1 > 0$, $x^4 + 2x^2 + 1 < 0$ וכו'. בפועל נפתור אותם ע"י פירוק לגורמים ומציאת נקודות האפס של כל גורם. לאחר מכן נבדוק את כל אחד מתחומי המספרים המתקבלים עבור הנעלם ונראה באלו מהם מתקבל פסוק אמת.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- | | |
|--------------------------------------|------------------------------------|
| $x(x^2 + x + 1) > 0$ (2) | $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$ (1) |
| $x^3 - 25x \geq 0$ (4) | $(-2x^2 - 3x + 2)(x+1) \leq 0$ (3) |
| $(x^2 + 8x + 20)(3x - 5) \leq 0$ (6) | $(x^2 + 3x + 5)(x - 2) > 0$ (5) |
| $x^3 - 6x^2 + 9x \leq 0$ (8) | $(x^2 - x - 6)(x - 1) < 0$ (7) |
| $(x-2)(x-4)(x-1) < 0$ (10) | $(x^2 + 6)(x+3) > 0$ (9) |

תשובות סופיות:

- | | |
|----------------------------------|---|
| $x > 0$ (2) | $1 < x < 2, x > 3$ (1) |
| $-5 \leq x \leq 0, x \geq 5$ (4) | $-2 \leq x \leq -1, x \geq \frac{1}{2}$ (3) |
| $x \leq 1\frac{2}{3}$ (6) | $x > 2$ (5) |
| $x \leq 0, x = 3$ (8) | $x < -2, 1 < x < 3$ (7) |
| $x < 1, 2 < x < 4$ (10) | $x > -3$ (9) |

אי-שוויונים עם מנה:

סיכום כללי:

אי שוויון מהצורה: $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ או $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ נקרא אי-שוויון עם מנה, בו $f(x)$

ו- $g(x)$ הם פולינומים כלשהם.

למשל: $\frac{2x+4}{x^2-3x+4} < 0$ בו: $f(x) = 2x+4$ ו- $g(x) = x^2-3x+4$.

כדי לפתור אי שוויון עם מנה נמצא את נקודות האפס של $f(x)$ ושל $g(x)$ ונציב מספרים בתחומים המתקבלים. אלו שיתנו פסוק אמת יהוו את פתרון אי השוויון.

הערות:

- ניתן לבצע כפל של המכנה בריבוע בכדי להעביר את אי השוויון לצורה של מכפלות.
- ניתן להעביר אי שוויון המכיל מספר מנות ומספרים שלמים לצורה הנייל ע"י פעולות אלגבריות מתאימות תחילה.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$\frac{x-1}{3x+2} \geq -3$ (2)	$\frac{x-1}{x^2-9} > 0$ (1)
$\frac{x-3}{2x^2-10x+12} > 0$ (4)	$\frac{1}{x^2-16} > 0$ (3)
$\frac{1}{-3(x-1)} < 0$ (6)	$\frac{2x-1}{x-5} \leq 0$ (5)
$\frac{1}{x^2-5x+6} < 0$ (8)	$\frac{x-1}{x+2} \leq 1$ (7)
$\frac{1}{x^2-8x+12} \geq 0$ (10)	$\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7} \geq 0$ (9)

תשובות סופיות:

$$x < -\frac{2}{3}, x \geq -\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 < x < 3, x > 3 \quad (4)$$

$$x > 1 \quad (6)$$

$$2 < x < 3 \quad (8)$$

$$x < 2, x > 6 \quad (10)$$

$$-3 < x < 1, x > 3 \quad (1)$$

$$x < -4, x > 4 \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \leq x < 5 \quad (5)$$

$$x > -2 \quad (7)$$

$$1 \leq x \leq 6 \quad (9)$$

אי-שוויונים כפולים - מערכת וגם:

סיכום כללי:

אי-שוויון כפול הוא צורה מקוצרת להציג שני אי-שוויונים אשר יש לפתור יחד (קרי: כמערכת 'וגם'). למשל במקום לכתוב: $a < b$ וגם $b < c$, ניתן לכתוב: $a < b < c$. מכאן כי כדי לפתור אי שוויון כפול יש לפצל אותו תחילה לשני אי-שוויונים ולפתור כל אחד בנפרד. לאחר מכן יש לקחת את חיתוך הפתרונות.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$0 < \frac{1}{x+4} < 2 \quad (2)$$

$$3 < x+1 < 5 \quad (1)$$

$$0 < \frac{8-3x}{5-2x} < 4 \quad (4)$$

$$-1 < \frac{x-1}{x+1} < 1 \quad (3)$$

$$6 < \frac{2x+10}{3} \leq \frac{7x-20}{5} \quad (6)$$

$$6x-38 \leq x-3 \leq 5x+7 \quad (5)$$

$$\frac{4x+5}{15} > \frac{3x-8}{5} + \frac{9-x}{3} > 11 \quad (8)$$

$$-1 \leq \frac{2x-6}{4} < \frac{x+2}{3} \quad (7)$$

תשובות סופיות:

$$x > -3\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 < x < 4 \quad (1)$$

$$x < 2\frac{2}{5}, x > 2\frac{2}{3} \quad (4)$$

$$x > 0 \quad (3)$$

$$x \geq 10 \quad (6)$$

$$-2.5 \leq x \leq 7 \quad (5)$$

$$\emptyset \quad (8)$$

$$1 \leq x < 13 \quad (7)$$

שאלות מסכמות – אי-שוויונים:

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$x \leq -\frac{3}{4} \cap \{-2 < x \leq 5 \cup 0 < x < 8\} \quad (1)$$

$$\frac{(x-4)(x+2)}{x-1} < 0 \quad (3) \quad x(x+5) - 3x + 15 \leq 2x - 1 - x(4-x) \quad (2)$$

$$\frac{(2x-3)(x-12)}{(x+1)(4-x)} \geq 0 \quad (5) \quad \frac{(x-5)(3x+1)}{(2-x)(x+7)} < 0 \quad (4)$$

$$\frac{(x-6)^2(x+1)}{x-2} > 0 \quad (7) \quad x(x+3)(2x-5) < 0 \quad (6)$$

$$\frac{x-3}{x^2+2} > 0 \quad (9) \quad \frac{5-2x}{(x-8)^2} \leq 0 \quad (8)$$

$$\frac{x^2-6x+9}{x^3-x} > 0 \quad (11) \quad \frac{x^2-4x}{x^2+2x-3} > 0 \quad (10)$$

$$\frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2} \quad (13) \quad \frac{x-7}{x^2+x+3} > 0 \quad (12)$$

$$6 < 5x - x^2 \cap x^2 > 3x + 10 \quad (15) \quad \frac{2x^2}{x^2-6x+8} \geq \frac{x}{x-4} - \frac{x}{x-2} \quad (14)$$

$$1 < \frac{x-1}{x-4} \leq 2 \quad (17) \quad \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x} > 0 \cup \frac{1}{x-3} < \frac{1}{1-x} \quad (16)$$

$$(18) \text{ לאלו ערכי } x \text{ נמצאת הפונקציה } f(x) = \frac{x}{x-3} \text{ מעל הפונקציה } g(x) = \frac{x+1}{x+3} ?$$

תשובות סופיות:

$$-2 < x \leq -\frac{3}{4} \quad (1)$$

$$x \leq -4 \quad (2)$$

$$x < -2, 1 < x < 4 \quad (3)$$

$$x < -7, -\frac{1}{3} < x < 2, x > 5 \quad (4)$$

$$-1 < x \leq 1.5, 4 < x \leq 12 \quad (5)$$

$$x < -3, 0 < x < 2.5 \quad (6)$$

$$x < -1, 2 < x < 6, x > 6 \quad (7)$$

$$2.5 \leq x < 8, x > 8 \quad (8)$$

$$x > 3 \quad (9)$$

$$x < -3, 0 < x < 1, x > 4 \quad (10)$$

$$-1 < x < 0, 1 < x < 3, x > 3 \quad (11)$$

$$x > 7 \quad (12)$$

$$x < -2, 2 < x < 4 \quad (13)$$

$$x \leq 0, 1 \leq x < 2, x > 4 \quad (14)$$

$$x \text{ אף } x \quad (15)$$

$$x \neq 1 \quad (16)$$

$$x \geq 7 \quad (17)$$

$$-3 < x < -\frac{3}{5}, x > 3 \quad (18)$$

אי שוויונים עם שורשים:

סיכום כללי:

מקרים בפתרון אי-שוויונות עם שורשים:

מקרה	אי השוויון	פתרון
$a \geq 0$	$\sqrt{f(x)} < a$	$0 \leq f(x) < a^2$
$a < 0$	$\sqrt{f(x)} < a$	אין פתרון
	$\sqrt{f(x)} > a$	כל x בת.ה. של $f(x)$

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$\sqrt{x+3} < 7 \quad (1)$$

$$\sqrt{2x-5} \geq 1 \quad (2)$$

$$\sqrt{2x^2+5x-6} > 2-x \quad (3)$$

$$\sqrt{x^2+x-6} < x-3 \quad (4)$$

$$\sqrt{x^2+3x+2}-1 < \sqrt{x^2-x+1} \quad (5)$$

$$\sqrt{x^2+5x+6}-\sqrt{x^2-x+1} < 1 \quad (6)$$

$$\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} > \frac{3}{2} \quad (7)$$

$$\frac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2 \quad (8)$$

$$\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{4}} < \frac{1}{x}-\frac{1}{2} \quad (9)$$

$$\sqrt{2-\sqrt{3+x}} < \sqrt{4+x} \quad (10)$$

$$\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5} \quad (11)$$

$$\sqrt{1+\frac{9}{x}} + 5\sqrt{\frac{x}{x+9}} \geq 4 \quad (12)$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad -3 \leq x < 46$$

$$(2) \quad x \geq 3$$

$$(3) \quad x < -10, x > 1$$

$$(4) \quad \emptyset$$

$$(5) \quad x \leq -2, -1 \leq x < \frac{-1 + \sqrt{13}}{6}$$

$$(6) \quad x \leq -3, -2 \leq x < \frac{-13 + \sqrt{73}}{16}$$

$$(7) \quad \frac{12}{25} < x \leq \frac{1}{2}$$

$$(8) \quad x < 2\sqrt{5} - 4$$

$$(9) \quad 1 < x \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$(10) \quad -2.618 < x \leq 1 \text{ שזה: } -\frac{3 + \sqrt{5}}{2} < x \leq 1$$

$$(11) \quad 2.5 \leq x < 3$$

$$(12) \quad x < -9, x > 0$$

תחום הגדרה:

שאלות:

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \sqrt{3x-4} \quad \text{ב. } f(x) = \sqrt{x^2-5x-6}$$

$$\text{ג. } f(x) = \sqrt{12x-x^2-x^3} \quad \text{ד. } f(x) = \sqrt{\frac{x+5}{x^2-4}}$$

$$\text{ה. } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}-x} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{\sqrt{3x^2-2x-1}}{2x-3}$$

(2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \sqrt{\sqrt{x+2}-3} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$$

$$\text{ג. } f(x) = \sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}} \quad \text{ד. } f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$$

(3) תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x) = \sqrt{ax-x^2-4}$ הוא $1 \leq x \leq 4$. מצא את ערכו של הפרמטר a .

(4) תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x) = \sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$ הוא $x \leq -2$, $x > 2$. מצא את ערכו של הפרמטר a .

(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{\sqrt{x+6}-a}$, a פרמטר חיובי.

א. הבע באמצעות a את תחום הגדרתה.

ב. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x) = \sqrt{\frac{2x}{x+5}}$.

ידוע כי תחום ההגדרה של שתי הפונקציות מכסה את כל ציר המספרים. מצא את תחום הערכים האפשרי של הפרמטר a .

תשובות סופיות:

- (1) א. $x \geq 1\frac{1}{3}$ ב. $x \leq -1, x \geq 6$ ג. $x \leq -4, 0 \leq x \leq 3$
- ד. $-5 \leq x < -2, x > 2$ ה. $-2 \leq x < 2, x > 2$ ו. $x \leq -\frac{1}{3}, 1 \leq x < \frac{3}{2}, x > \frac{3}{2}$
- (2) א. $x \geq 7$ ב. $-6 \leq x \neq -2$ ג. $x \leq -1\frac{1}{2}, x \geq 1$
- ד. $x \leq -3, -2 \leq x \neq 1$
- (3) $a = 5$
- (4) $a = 2$
- (5) א. $x \geq a^2 - 6$ ב. $0 < a \leq 1$

אי שוויונים עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

כללים לפתרון אי שוויון עם ערך מוחלט יחיד:

מקרה	$ x < a$	$ x > a$
פתרון	$-a < x < a$	$x < -a \cap x > a$

כללים לפתרון אי שוויון עם מספר ערכים מוחלטים:

- נמצא את הנקודות המאפסות כל ביטוי עם ערך מוחלט.
- מחלקים את אי השוויון לתחומים לפי נקודות האפס.
- פותרים את אי השוויון לכל תחום בנפרד.
- כותבים פתרון כללי (מערכת או) לכל התחומים יחדיו.

שאלות:

(1) פתור את אי-השוויונים הבאים:

- א. $|x+2| < 3$ ב. $|2x+1| > 7$
- ג. $|6-2x| < x$ ד. $|2x+1|-3x > 4$

(2) פתור את אי-השוויונים הבאים:

- א. $1 < |4-3x| < 7$ ב. $|2x+3| < 8 < |5-x|$

(3) פתור את אי-השוויונים הבאים:

- א. $|x^2+6x-4| < 12$ ב. $|x^2+x-10| > 3x-2$
- ג. $|x^2-3x| < 4$ ד. $|6x^2-7x-4| > 1$
- ה. $x^2-6|x|+5 \leq 0$ ו. $x^2-6|x+1|-1 > 0$

(4) פתור את אי-השוויונים הבאים :

ב. $|x+8| < 11 - |1-3x|$

א. $|x-3| + |2x+2| > 7$

ד. $|2x-6| + |x+5| > 14 - |1-x|$

ג. $|3-2x| - 11 > 4 - |6+x|$

ו. $|x+3| + |x^2 - 5x + 4| < 19$

ה. $|5+4x| - |3-x| + \left|4 - \frac{1}{2}x\right| \leq 22$

(5) פתור את אי-השוויונים הבאים :

ב. $1 \leq \left| \frac{x+2}{x-2} \right| \leq 2$

א. $\left| \frac{3x-1}{x-2} \right| \geq 3$

ד. $\left| \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 3x + 2} \right| > 5$

ג. $\frac{|x-6| + 8x}{x-12} \leq 12$

(6) פתור את אי-השוויונים הבאים (ערך מוחלט ושורשים) :

ב. $2 - \sqrt{1-x} \leq |x+2| - 3$

א. $\sqrt{x^2 - |x-12|} < x$

ד. $\frac{|x+2| - |x|}{\sqrt{4-x^3}} > 0$

ג. $\sqrt{|2x+1| - x - 1} \leq 4 - |3x|$

תשובות סופיות:

- (1) א. $-5 < x < 1$ ב. $x < -4$ או $3 < x$
 ג. $2 < x < 6$ ד. $x < -1$
- (2) א. $1\frac{2}{3} < x < 3\frac{2}{3}$ או $-1 < x < 1$ ב. $-5\frac{1}{2} < x < -3$
- (3) א. $-2 < x < 2$ או $-8 < x < -4$ ב. $x < 2$ או $4 < x$
 ג. $-1 < x < 4$ ד. $x < -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3} < x < \frac{3}{2}$, $x > \frac{5}{3}$
 ה. $-5 \leq x \leq -1$ או $1 \leq x \leq 5$ ו. $x < -5$, $x > 7$
- (4) א. $x < -2$ או $2 < x$ ב. $-1 < x < 1$
 ג. $x < -6$ או $4 < x$ ד. $x < -1$ או $4 < x$
 ה. $-7\frac{3}{7} \leq x \leq 4$ ו. $-2 < x < 6$
- (5) א. $\frac{7}{6} \leq x < 2$, $x > 2$ ב. $0 \leq x \leq \frac{2}{3}$, $x \geq 6$
 ג. $x < 12$, $x \geq 46$ ד. $\frac{1}{2} < x < 1$, $1 < x < 2$, $2 < x \leq 4$
- (6) א. $x = -1$, $x \geq 3$, $x \neq 12$ ב. $x \leq \frac{-15 + \sqrt{33}}{2}$
 ג. $0 \leq x \leq 1$, $-1 \leq x \leq -\frac{2}{3}$ ד. $-1 < x < \sqrt[3]{4}$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי א

פרק 4 - חוקי החזקות והשורשים

תוכן העניינים

85	1. חוקי החזקות.....
90	2. חוקי השורשים.....
94	3. כתיבה מדעית של מספרים.....

חוקי החזקות:

סיכום כללי:

סיכום חוקי החזקות:

$$\begin{array}{lll}
 1. \quad a^0 = 1 & 2. \quad a^1 = a & 3. \quad a^n \cdot a^m = a^{m+n} \\
 4. \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} & 5. \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m} & 6. \quad a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m \\
 7. \quad \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m & 8. \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m} & 9. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m
 \end{array}$$

שאלות:

(1) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^n a^m = a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} \quad a^2 a^6 & \text{ב.} \quad t^3 t^5 t^7 & \text{ג.} \quad b^2 b^5 b^{12} b^3 \\
 \text{ד.} \quad \frac{k^8}{k^3} & \text{ה.} \quad \frac{n^{14}}{n^9} & \text{ו.} \quad \frac{c^6}{c^2} \\
 \text{ז.} \quad \frac{a^3 a^{19}}{a^{15}} & \text{ח.} \quad \frac{x^{30}}{x^9 x^{18}} & \text{ט.} \quad \frac{y^3 y^{15}}{y^4 y^{14}} \\
 \text{י.} \quad 3^2 3^3 3^4 & \text{יא.} \quad \frac{2^{16} 2^2}{2^{10}} & \text{יב.} \quad \frac{5^{20} 5^3 5^{16}}{5^4 5^{22} 5^8}
 \end{array}$$

(2) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים: $a^n a^m = a^{n+m}$ ו- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} \quad \frac{3^4 2^7}{2^6 3^2} & \text{ב.} \quad \frac{a^{10} b^{13} a^3}{b^4 b^6 b^2 a^{12}} & \text{ג.} \quad \frac{x^8 y^5 y^9 x^2}{y^4 x^4}
 \end{array}$$

(3) לפניך הביטוי הבא: $\frac{3^6 2^{17} 3^3 2^4}{3^4 2^3 2^2}$.

מצא n כך שיתקיים שוויון בין הביטוי $243 \cdot 2^n$ לבין הביטוי הנתון.

(4) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים :

א. $\frac{2^3 \cdot 2^7}{2^4 \cdot 2^5}$	ב. $\frac{9^3 \cdot 27^2}{3^9 \cdot 81}$
ג. $\frac{10^9 \cdot 25^5 \cdot 8^{-1}}{40^3 \cdot 125^5}$	ד. $2^3 + 2^5$

(5) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוק : $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

א. $(a^2)^4$	ב. $(c^3)^{10}$	ג. $(x^3 x^{10})^2$
ד. $\frac{(b^2)^3}{b^2 b^3}$	ה. $\frac{n^7 n^8}{(n^3)^4}$	ו. $\frac{d^{20} (d^4)^2}{d^{12} (d^3)^2}$
ז. $\frac{2^5 (2^4)^2 2^3}{(2^3 2^2)^3}$	ח. $\frac{3^6 (3^3 3^2)^6}{3^{28} (3^2)^3}$	ט. $\frac{(8^3)^8 8^{11}}{(8^2 8)^3 8^8}$
י. $\frac{(2^4)^5 (3^6)^7 2^{20}}{3^{35} 2^{40}}$	יא. $\frac{(3^2)^6 5^{31} 3^7}{(5^2)^{10} 5^{11} 3^{18}}$	יב. $\frac{(3^2)^7 5^{10} (5^3)^2}{3^9 5^{16}}$

(6) לפניך הביטויים הבאים : $\left((3^2)^3\right)^4$ ו- $\left((3^6)^n\right)^2$.מצא n כך שיתקיים שוויון בין שני הביטויים.

(7) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים :

א. $\frac{2^3 3^5}{2^2 3^4}$	ב. $\frac{5^{20} 3^{14} 3^8}{3^{20} 5^{12} 5^8}$	ג. $\frac{7^{12} 2^2 2^6}{2^5 7^{10} 7}$
------------------------------	--	--

(8) פשט את הביטויים הבאים :

א. $3^2 9 \cdot 81^2$	ב. $64^2 2^3 8^2$	ג. $125 \cdot 25 \cdot 5^5$
ד. $\frac{2^4 \cdot 16^5}{8 \cdot 512}$	ה. $\frac{(4^2)^3 16}{64 \cdot 2^3}$	ו. $\frac{\left((3^4)^4\right)^5}{81^3 27^4 3^5}$

(9) פשט את הביטויים הבאים :

$$\begin{array}{ll}
 \text{א.} & \frac{(2a^2b)^3 \cdot (ab^{-3})^2}{4ab^{-2} \cdot \left(\frac{a^2}{b}\right)^4} \\
 \text{ב.} & \frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}} \\
 \text{ג.} & \frac{4^{b+3}}{4^{b+1} + 4^{b+2}} \\
 \text{ד.} & \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^{n+3} + x^{n+5}}{x^{n+2}}
 \end{array}$$

(10) פשט את הביטויים הבאים בעזרת החוקים : $(ab)^n = a^n b^n$ ו- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} & (a^2b)^3 & \text{ב.} & (m^4n^3)^5 & \text{ג.} & (x^{12}y^3)^3 \\
 \text{ד.} & \left(\frac{a^3}{b^2}\right)^4 & \text{ה.} & \left(\frac{i^4}{k^3}\right)^7 & \text{ו.} & \left(\frac{a^{14}b^4}{a^6ab^3}\right)^3 \\
 \text{ז.} & \left(\frac{x^3y^5y^2x^6}{y^4x^7}\right)^6 & \text{ח.} & \left(\frac{t^7r^{20}t^3}{r^2r^{12}t^8}\right)^2 & \text{ט.} & \left(\frac{(b^{12}c)^2c^{14}}{c(c^3b^5)^4b^3}\right)^2
 \end{array}$$

(11) חשב ללא מחשבון את הביטויים הבאים :

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} & \left(\frac{3^9 2^6 2^2}{3^6 2^5 3^2}\right)^2 & \text{ב.} & \left(\frac{(5^4)^2 3^6}{3^5 5^7}\right)^2 & \text{ג.} & \left(\frac{7^3 \cdot 16 \cdot 128 \cdot 49}{(2^2 7)^5}\right)^3
 \end{array}$$

(12) בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה שלילית :

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} & \frac{1}{4^6} & \text{ב.} & \frac{1}{5^3} & \text{ג.} & \frac{1}{2^{10}} \\
 \text{ד.} & \frac{1}{8} & \text{ה.} & \frac{1}{81} & \text{ו.} & \frac{1}{125}
 \end{array}$$

(13) בטא את הביטויים הבאים מחדש בעזרת שימוש בחזקה חיובית וחשב את ערכם :

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} & \frac{1}{4^{-3}} & \text{ב.} & \frac{1}{3^{-2}} & \text{ג.} & \frac{1}{5^{-3}}
 \end{array}$$

(14) חשב את הביטויים הבאים :

ג. $5^6 \cdot 5^{-3} \cdot 5^{-2}$

ב. $2^{-8} \cdot 512 \cdot 2^2$

א. $3^2 \cdot 3^{-5} \cdot 3^7$

ו. $\frac{3^{-6} \cdot 7^7 \cdot 7^{-4}}{3^{-4} \cdot 3^{-3} \cdot 7^3}$

ה. $\frac{2^{-5} \cdot 5^3 \cdot 2^{14}}{5^2 \cdot 5^{-10} \cdot 5^8 \cdot 2^6}$

ד. $2^{14} \cdot 3^{-6} \cdot 2^{16} \cdot 3^4 \cdot 2^{-30}$

(15) פשט את הביטויים הבאים לצורה ללא חזקות שליליות.

ג. $\frac{2^{-3} 5^4}{5^4 \cdot 125 \cdot (5^2 2)^{-3} \cdot 2^{-4}}$

ב. $\frac{(4^4)^{-4} 3^{-11}}{(3^{-2} 4^3)^{-6}}$

א. $\left(\frac{5^{-4}}{3^2}\right)^{-6}$

(16) פשט את הביטויים הבאים :

ג. $\frac{(m^{n+2})^3 \cdot m^{-4n-2}}{\frac{1}{m^{6n+2}} \cdot (m^3)^{n-2}}$

ב. $\frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}}$

א. $\frac{a^{n+2} \cdot a^{2-3n}}{(a^3)^{n+1}}$

תשובות סופיות:

- (1) א. a^8 ב. t^{15} ג. b^{22} ד. k^5 ה. n^5 ו. c^4
 ז. a^7 ח. x^3 ט. 1 י. 3^9 יא. 2^8 יב. 5^5
- (2) א. 18 ב. ab ג. $x^6 y^{10}$
- (3) $n=16$
- (4) א. 2 ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{5}{8}$ ד. 40
- (5) א. a^8 ב. c^{30} ג. x^{26} ד. b ה. n^3 ו. d^{10}
 ז. 2 ח. 9 ט. 8^{18} י. 3^7 יא. 3 יב. 3^5
- (6) $n=2$
- (7) א. 6 ב. 9 ג. 56
- (8) א. 3^{12} ב. 2^{21} ג. 5^{10} ד. 2^{12} ה. 2^7 ו. 3^{51}
- (9) א. $\frac{2b^3}{a}$ ב. k ג. $3\frac{1}{5}$ ד. $\frac{1}{x} + x$
- (10) א. $a^6 b^3$ ב. $m^{20} n^{15}$ ג. $x^{36} y^9$ ד. $\frac{a^{12}}{b^8}$ ה. $\frac{i^{28}}{k^{21}}$ ו. $a^{21} b^3$
- ז. $x^{12} y^{18}$ ח. $t^4 r^{12}$ ט. $b^2 c^6$
- (11) א. 576 ב. 225 ג. 8
- (12) א. 4^{-6} ב. 5^{-3} ג. 2^{-10} ד. 2^{-3} ה. 3^{-4} ו. 5^{-3}
- (13) א. 64 ב. 9 ג. 125
- (14) א. 81 ב. 8 ג. 5 ד. $\frac{1}{9}$ ה. 1000 ו. 3
- (15) א. $5^{24} \cdot 3^{12}$ ב. $\frac{4^2}{3^{23}}$ ג. $5^3 \cdot 2^4$
- (16) א. a^{1-5n} ב. k ג. m^{2n+12}

חוקי השורשים:

סיכום כללי:

סיכום חוקי השורשים:

$$\begin{array}{lll}
 1. \quad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} & 2. \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} & 3. \quad \sqrt[n]{a^n} = a \\
 4. \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} & 5. \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} & 6. \quad \sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot n]{a}
 \end{array}$$

שאלות:

17) הבא את הביטויים הבאים לצורה: $\sqrt[n]{a^m}$.

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } 3^{\frac{1}{4}} & \text{ב. } 2^{\frac{3}{5}} & \text{ג. } 6^{\frac{5}{6}} \\
 \text{ד. } -12^{\frac{2}{7}} & \text{ה. } -(-4)^{\frac{1}{3}} & \text{ו. } -(-3)^{\frac{3}{4}} \\
 \text{ז. } 5^{-\frac{1}{4}} & \text{ח. } 27^{-\frac{1}{3}} & \text{ט. } 64^{-\frac{5}{6}}
 \end{array}$$

18) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } \sqrt{49} & \text{ב. } -\sqrt{25} & \text{ג. } \sqrt[3]{8} \\
 \text{ד. } -\sqrt[3]{128} & \text{ה. } \sqrt[3]{(-2)^6} & \text{ו. } (\sqrt[5]{1024})^2 \\
 \text{ז. } (\sqrt[5]{-243})^3 & \text{ח. } \sqrt[4]{-16} & \text{ט. } \sqrt[4]{-25^2} \\
 \text{י. } \sqrt[4]{(-25)^2} & &
 \end{array}$$

(19) חשב ללא מחשבון את ערכם של הביטויים הבאים:

- | | | |
|---|--|---|
| א. $8^{\frac{2}{3}}$ | ב. $32^{\frac{3}{5}}$ | ג. $128^{-\frac{2}{7}}$ |
| ד. $\left(\frac{1}{25}\right)^{-1.5}$ | ה. $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-2.5}$ | ו. $\left(\frac{64}{343}\right)^{-\frac{2}{3}}$ |
| ז. $81^{\frac{3}{4}} \cdot 64^{-\frac{1}{3}}$ | ח. $343^{\frac{2}{3}} \cdot 100^{\frac{1}{2}}$ | ט. $16^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{-\frac{1}{3}} \cdot 4^{-\frac{1}{2}}$ |

(20) חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$

(21) פשט את הביטויים הבאים:

- | | | |
|---|--|--|
| א. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ | ב. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$ | ג. $\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$ |
| ד. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ | ה. $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$ | ו. $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$ |
| ז. $\frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}}$ | ח. $\frac{\sqrt[3]{500} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[4]{25^2} \cdot \sqrt[3]{4}}$ | ט. $\frac{\sqrt[3]{8^2} \sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{400} \sqrt{2}}$ |

(22) הכנס לתוך שורש את המספרים החופשיים:

- | | | |
|-------------------|----------------|--------------------------|
| א. $3\sqrt{2}$ | ב. $5\sqrt{3}$ | ג. $\frac{\sqrt{36}}{2}$ |
| ד. $2\sqrt[3]{3}$ | ה. $x\sqrt{x}$ | |

(23) הכנס את כל המקדמים בביטויים הבאים לתוך השורש:

- | | | |
|--------------------------|-----------------------------|---------------------------------|
| א. $2\sqrt{5}$ | ב. $4\sqrt[3]{2}$ | ג. $2\sqrt[5]{3}$ |
| ד. $\frac{\sqrt{24}}{2}$ | ה. $\frac{\sqrt[3]{24}}{2}$ | ו. $\frac{3\sqrt[4]{5000}}{10}$ |
| ז. $-5\sqrt[3]{2}$ | ח. $-5\sqrt[4]{2}$ | ט. $-5\sqrt[5]{-2}$ |

(24) הוצא מהשורש את הכופל הגדול ביותר :

- א. $\sqrt{12}$ ב. $\sqrt{48}$ ג. $\sqrt{63}$
- ד. $\sqrt[3]{54}$ ה. $\sqrt{x^5}$

(25) חלץ מן הביטויים הבאים את המקדם הגבוה ביותר ככל הניתן :

- א. $\sqrt{40}$ ב. $\sqrt{50}$ ג. $\sqrt{320}$
- ד. $\sqrt[3]{108}$ ה. $\sqrt[3]{56}$ ו. $\sqrt[5]{160}$
- ז. $\sqrt[4]{162}$ ח. $\sqrt[5]{972}$ ט. $\sqrt[6]{192}$

(26) פשט את הביטויים הבאים :

- א. $\sqrt{18} - \sqrt{8}$ ב. $\sqrt{7} + \sqrt{63}$ ג. $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128}$
- ד. $\sqrt[4]{405} - \sqrt[4]{80}$ ה. $\frac{20}{\sqrt{5}}$ ו. $\frac{\sqrt{8}}{2}$
- ז. $\frac{16}{\sqrt{2}}$ ח. $\frac{6}{\sqrt{3} + \sqrt{12}}$ ט. $\frac{10}{\sqrt[5]{160} - \sqrt[5]{5}}$

(27) פשט את הביטויים הבאים :

- א. $3^{\frac{1}{4}} \cdot 9^{-2.5} \cdot 27^{\frac{3}{2}}$ ב. $2^{\frac{3}{4}} \cdot 16^{\frac{1}{2}} \cdot 64^{-3}$ ג. $125^{\frac{1}{6}} \cdot 5^2 \cdot 5^{-\frac{2}{3}}$
- ד. $\frac{27^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}}}{9^{\frac{1}{6}}}$ ה. $\frac{49^{\frac{2}{5}} \cdot 7^{-\frac{6}{5}}}{343^{\frac{1}{5}}}$ ו. $\frac{512^{\frac{1}{4}} \cdot 64^{-\frac{3}{4}}}{128^{\frac{1}{8}} \cdot 2^{-2}}$

תשובות סופיות:

- (17) א. $\sqrt[4]{3}$ ב. $\sqrt[5]{2^3}$ ג. $\sqrt[6]{6^5}$ ד. $-\sqrt[7]{12^2}$ ה. $-\sqrt[3]{-4}$ ו. ϕ
- ז. $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ ח. $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$ או $\frac{1}{3}$ ט. $\frac{1}{\sqrt[6]{64^5}}$ או $\frac{1}{2^5}$
- (18) א. 7 ב. -5 ג. 2 ד. -2 ה. 4 ו. 16
- ז. -27 ח. ϕ ט. ϕ י. 5
- (19) א. 4 ב. $\frac{1}{8}$ ג. $\frac{1}{4}$ ד. 125 ה. $\frac{32}{243}$ ו. $\frac{49}{16}$
- ז. $\frac{27}{4}$ ח. $\frac{10}{49}$ ט. $\frac{1}{2}$
- (20) $\sqrt{2}$
- (21) א. 4 ב. 9 ג. 20 ד. 6 ה. 3 ו. 2
- ז. $\sqrt{2}$ ח. $\sqrt{5}$ ט. $\sqrt{2}$
- (22) א. $\sqrt{18}$ ב. $\sqrt{75}$ ג. $\sqrt{9}$ ד. $\sqrt[3]{24}$ ה. $\sqrt{x^3}$
- (23) א. $\sqrt{20}$ ב. $\sqrt[3]{128}$ ג. $\sqrt[5]{96}$ ד. $\sqrt{6}$ ה. $\sqrt[3]{3}$
- ו. $\sqrt[4]{40 \frac{1}{2}}$ ז. $\sqrt[3]{-250}$ ח. $-\sqrt[4]{1250}$ ט. $\sqrt[5]{5^5 \cdot 2}$
- (24) א. $2\sqrt{3}$ ב. $4\sqrt{3}$ ג. $3\sqrt{7}$ ד. $3\sqrt[3]{2}$ ה. $x^2\sqrt{x}$
- (25) א. $2\sqrt{10}$ ב. $5\sqrt{2}$ ג. $8\sqrt{5}$ ד. $3\sqrt[3]{4}$ ה. $2\sqrt[3]{7}$ ו. $2\sqrt[5]{5}$
- ז. $3\sqrt[4]{2}$ ח. $3\sqrt[5]{4}$ ט. $2\sqrt[8]{3}$
- (26) א. $\sqrt{2}$ ב. $4\sqrt{7}$ ג. $6\sqrt[3]{2}$ ד. $\sqrt[4]{5}$ ה. $4\sqrt{5}$ ו. $\sqrt{2}$
- ז. $8\sqrt{2}$ ח. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ או $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ט. $\frac{10}{\sqrt[5]{5}}$ או $2\sqrt[5]{5^4}$
- (27) א. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ ב. $\frac{1}{\sqrt[4]{2^{61}}}$ ג. $\sqrt[6]{5^{11}}$ ד. 27 ה. $\frac{1}{7}$ ו. $\sqrt[8]{2^5}$

כתיבה מדעית של מספרים:

שאלות:

(28) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. 15,000,000	ב. 1,500,000
ג. 150,000,000,000	ד. 23,400,000
ה. 0.0003	ו. 0.00000042
ז. 0.000000042	ח. 0.00000000042

(29) בטא את המספרים הבאים בכתיב מדעי:

א. $(3,000,000)^2$	ב. $(2,000,000)^2$
ג. $(5,000)^3$	ד. $(50,000)^3$
ה. $(0.0002)^4$	ו. $(0.00004)^3$
ז. $(0.000005)^3$	ח. $(0.000000007)^3$

תשובות סופיות:

(28) א. $1.5 \cdot 10^7$	ב. $1.5 \cdot 10^6$	ג. $1.5 \cdot 10^{11}$	ד. $2.34 \cdot 10^7$	ה. $3 \cdot 10^{-4}$
ו. $4.2 \cdot 10^{-7}$	ז. $4.2 \cdot 10^{-8}$	ח. $4.2 \cdot 10^{-10}$		
(29) א. $9 \cdot 10^{12}$	ב. $4 \cdot 10^{12}$	ג. $1.25 \cdot 10^{11}$	ד. $1.25 \cdot 10^{14}$	ה. $1.6 \cdot 10^{-15}$
ו. $6.4 \cdot 10^{-14}$	ז. $1.25 \cdot 10^{-16}$	ח. $3.43 \cdot 10^{-25}$		

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי א

פרק 5 - משוואות ואי-שוויונים מעריכיים

תוכן העניינים

95	1. משוואות מעריכיות יסודיות
97	2. משוואות עם חיבור וחיסור איברים
99	3. משוואות בהן המשתנה גם בבסיס
100	4. משוואות מסכמות שונות
101	5. משוואות עם קבוע אוילר
102	6. מערכת משוואות מעריכיות
103	7. אי שוויונים מעריכיים
104	8. אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך

משוואות מעריכיות יסודיות:

סיכום כללי:

- פתרון כללי של משוואת מעריכית מהצורה: $a^x = a^y$ הוא: $x = y$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = 1$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^0 = 1$.
- פתרון של משוואה מהצורה: $a^x = b^x$ הוא: $x = 0$ שכן: $a^x = b^x = 1$ ללא תלות בבסיסים.

שאלות:

1 פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי החזקות היסודיים):

א. $2^x = 16$ ב. $5^x \cdot 25^{x+2} = 125$

ג. $10^{x-2} = 10000^{x+1}$ ד. $9^x \cdot 3^{x^2} = 81^{3x-4}$

ה. $(2^x \cdot 32)^3 = 8$ ו. $(5^{x^2})^5 \cdot \frac{1}{5^5} = 625^{x-1}$

ז. $\frac{7^x}{343^3} = 1$ ח. $(25 \cdot 0.2^{2x})^2 = \left(\frac{1}{125}\right)^{1-x}$

2 פתור את המשוואות הבאות (הבסיס הוא שבר):

א. $27 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{5x+2} = 8$ ב. $\left(\frac{3}{4}\right)^{2-x} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{9}{16}\right)^{7+x}$

ג. $25 \left(\frac{7}{5}\right)^{x^2-2x} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{4-x} = 49$

3 פתור את המשוואות הבאות (שימוש בחוקי השורשים):

א. $\sqrt{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9\sqrt{3}$ ב. $\sqrt{3^{x+7}} = 81$

ג. $(9\sqrt{27})^{3x} \cdot 3^{2-x} = \frac{1}{9}$ ד. $\sqrt[3]{16} \cdot \left(\frac{1}{2^x}\right)^3 = \frac{1}{16}$

ה. $2^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^x}} = 8(\sqrt{8})^{-\sqrt{x}}$ ו. $5^x \cdot \frac{1}{25^5} = 125^{\sqrt{x}}$

(4) פתור את המשוואות הבאות (מכפלת בסיסים שונים):

א. $2^x = 7^x$	ב. $3^x \cdot \frac{625}{\sqrt{25^x}} = 81$
ג. $2^{3x} \cdot 5^{3x} = 1000000$	ד. $2^{x+1} \cdot 3^{x-2} \cdot 7^x = 392$
ה. $243 \cdot 2^{x-1} \cdot 18^{x-9} = \frac{1}{3^{x-2}}$	ו. $108 \cdot \frac{1}{2^{1-2x}} = 72^x \cdot \sqrt{0.5}$
ז. $2^{2x+2} \cdot 5^{x+1} = (2\sqrt{5})^{4-x}$	

תשובות סופיות:

א. $x = 4$	ב. $x = -\frac{1}{3}$	ג. $x = -2$	ד. $x = 2, 8$	ה. $x = -4$
ו. $x = 1, -\frac{1}{5}$	ז. $x = 9$	ח. $x = 1$		
א. $x = -1$	ב. $x = -2$	ג. $x = 3, -2$		
א. $x = -\frac{1}{2}$	ב. $x = 1$	ג. $x = -\frac{8}{19}$	ד. $x = 2, -\frac{2}{3}$	ה. $x = 4, 9$
א. $x = 0$	ב. $x = 4$	ג. $x = 2$	ד. $x = 2$	ה. $x = 5$
ו. $x = 1.5$	ז. $x = \frac{2}{3}$			

משוואות עם חיבור וחסור איברים:

סיכום כללי:

במשוואות הכוללות חיבור וחסור של איברים, נאתר את הבסיס עם המעריך הקטן ביותר ונסמן אותו ב- t , למשל במשוואה: $4^x - 3 \cdot 2^x = 4$ נסמן: $2^x = t$.
נבטא את כל איברים המשוואה באמצעות t ונפתור אותה עבורו.
לאחר מכן נחזיר את ההצבה למציאת ערכי ה- x המתאימים.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם חיבור וחסור ממעלה ראשונה):

ב. $8^x + 3 \cdot 8^x = 256$

א. $2^x + 6 \cdot 2^x = 56$

ד. $2 \cdot 6^x + 6^{x+2} - 6^{x-1} = 227$

ג. $5 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 162$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם חיבור וחסור ממעלה ראשונה):

ב. $5^{3x+2} + 4 \cdot 125^x = 29$

א. $81^{x+1} + 18 \cdot 3^{4x-3} = 735$

ד. $\sqrt{10000^{x+1}} - \sqrt[4]{10^{8x+1}} = \sqrt[4]{1000} \cdot (\sqrt[4]{10^7} - 1)$

ג. $(2^{3x+1})^2 - 64^{x-\frac{1}{3}} = 15$

ו. $5^{-x} + 25^{\frac{1-x}{2}} - 5^{-x-1} = 145$

ה. $6^{-x} - 5 \cdot 36^{-\left(\frac{x}{2}+1\right)} = 186$

ח. $4^{x+2} - 6 \cdot 4^x = 7 \cdot 12^{x+1} + 6 \cdot 12^x$

ז. $2 \cdot 10^{x+1} + 10^{x+2} = 3 \cdot 5^{x+1}$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחסור ממעלה שנייה):

ב. $16^{x+1} - 65 \cdot 4^x + 4 = 0$

א. $9^x - 36 \cdot 3^x + 243 = 0$

ד. $4^{-x} - 3 \cdot 4^x + 2 = 0$

ג. $6^x - 4 \cdot 6^{-x} + 3 = 0$

ו. $\left(2^{\frac{1}{3}x+2}\right)^2 - 5 \cdot 2^{\frac{1}{3}x+1} + 1 = 0$

ה. $\left(\frac{4}{9}\right)^x - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-x-1} = -\frac{2}{3}$

(4) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות):

ב. $\frac{7^x}{7^x-4} + \frac{8}{7^x+5} = 3$

א. $\frac{20}{9^x+1} = 3 - \frac{8}{9^x-1}$

(5) פתור את המשוואות הבאות (משוואות מסכמות):

א. $\frac{1}{25^{1-x}} - 6 \cdot 5^{x-1.5} + 1 = 0$	ב. $3^x - \sqrt{16 \cdot 3^{x+1}} = -9$
ג. $36^x - 6^{x+1} \cdot 3^x + 8 \cdot 9^x = 0$	ד. $4 \cdot 9^x - 10 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0$
ה. $25 \cdot 5^{2x} + 16 \cdot 15^x = 9^{x+1}$	ו. $9^x + 4^x - 6^x = \frac{7}{6^{1-x}}$
ז. $\frac{8^{2x} - 8}{7} = 4^x - 2$	ח. $2^{3x} - 2^{2x+2} - 2^x + 4 = 0$

תשובות סופיות:

א. $x = 3$	ב. $x = 2$	ג. $x = 4$	ד. $x = 1$
א. $x = \frac{1}{2}$	ב. $x = 0$	ג. $x = \frac{1}{3}$	ד. $x = \frac{1}{4}$
ה. $x = -3$	ו. $x = -2$	ז. $x = -3$	ח. $x = -2$
א. $x = 2, 3$	ב. $x = 1, -2$	ג. $x = 0$	ד. $x = 0$
ה. $x = 0, 1$	ו. $x = -6, -9$		
א. $x = 1, -\frac{1}{2}$	ב. $x = 1$		
א. $x = \frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$	ב. $x = 1, 3$	ג. $x = 1, 2$	ד. $x = 1, 0$
ה. $x = -2$	ו. $x = 1, -1$	ז. $x = 0, \frac{1}{2}$	ח. $x = 0, 2$

משוואות בהן המשתנה גם בבסיס:

סיכום כללי:

במשוואות עם משתנה בבסיס יש לדרוש תנאי עבורו הבסיס חיובי.
יש לקחת את חיתוך תחומי ההגדרה (במידה וקיימים ביטויים עם שורשים או שברים) יחד עם תוצאת השוואת המעריכים.

הערה:

יש לבדוק את ערכי ה- x עבורם הבסיס שווה ל-1 ולראות האם מתקבל פסוק אמת או פסוק שקר. בהתאם יש להוסיף או להוריד אותו מתחום המספרים המהווים את פתרון המשוואה.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$(\sqrt{3-x})^{\sqrt{x}} = (\sqrt[3]{3-x})^x \cdot \sqrt{\sqrt[3]{3-x}} \quad (1)$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2+x} = 1 \quad (2)$$

$$\frac{|x-3|^{x^2-2}}{|x-3|^{x-1}} = |x-3|^{-1} \quad (3)$$

תשובות סופיות:

$$x = \frac{1}{4}, 1, 2 \quad (1)$$

$$\text{אין פתרון.} \quad (2)$$

$$x = 0, 1, 2, 4 \quad (3)$$

משוואות מסכמות שונות:

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$5(2^x - 2) + 2 = 4^x - 2^x \quad (1)$$

$$\frac{6}{4^{x-1} - 1} + \frac{2^{x+1}}{2^x + 2} = \frac{2^x + 4}{2^x - 2} \quad (2)$$

$$\frac{4^x}{4^x - 10} - \frac{4}{2^{2x-1} - 3} = \frac{32}{16^x - 4^{x+2} + 60} \quad (3)$$

$$3^{2x^2+2} - 3^{x^2+3} + 9 = 3^{x^2+1} \quad (4)$$

$$\sqrt{x}10 = 4 \cdot \sqrt[2]{x}10 + 60 \quad (5)$$

$$\sqrt[x-1]{8 \cdot 2^{x+1}} = (\sqrt{x}2)^2 \cdot \sqrt[x-1]{x}32 \quad (6)$$

$$10 \cdot 4^{x+2} - 16 \cdot 10^x - 90 \cdot 6^x + 36 \cdot 15^x = 0 \quad (7)$$

תשובות סופיות:

$$x = 1, 2 \quad (1)$$

$$x = 3 \quad (2)$$

$$x = 1.5 \quad (3)$$

$$x = 1, -1 \quad (4)$$

$$x = \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$x = -3 \quad (6)$$

$$x = 1, -2 \quad (7)$$

משוואות עם קבוע אוילר:

סיכום כללי:

קבוע אוילר מסומן באות e וערכו שווה (בערך) ל-2.71828. למספר זה משמעויות רבות במתמטיקה ובמדעים ועל כן הוחלט לסמן אותו באות e משלו ולשלב אותו במשוואות מתמטיות ועוד. דרך הפתרון של משוואה שבה הבסיס הוא e זהה לחלוטין לשל משוואה מעריכית רגילה כפי שנלמד בפרק זה.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (משוואות יסודיות עם קבוע אוילר):

$$\text{א. } e^{3x} = e^{2x-1} \quad \text{ב. } e^{5x-1} = e \cdot e^{6x+1}$$

$$\text{ג. } e^{x-5} = (e^{1-x})^3 \quad \text{ד. } e^x \cdot \sqrt{e^{3x-1}} = \left(\frac{1}{e^x}\right)^{1-3x}$$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם חיבור וחיסור):

$$\text{א. } e^2 \cdot e^x - e^{x+1} = e - 1 \quad \text{ב. } \sqrt[3]{e^{x+1}} \cdot e^2 = e^x \sqrt{e}$$

$$\text{ג. } e^{2x} + e^x - 2 = 0 \quad \text{ד. } e^{1+x} + e^{1-x} = e^2 + 1$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (המשתנה גם בבסיס):

$$\text{א. } xe^x = \sqrt[4]{e} \cdot x \quad \text{ב. } e^{3x} = x \cdot e^{3x}$$

$$\text{ג. } xe^{x^2} = \frac{x}{\sqrt{e^x}} \quad \text{ד. } \sqrt[3]{e^{3x-1}} \cdot x = xe^x$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x = -1 \quad \text{ב. } x = -3 \quad \text{ג. } x = 2 \quad \text{ד. } x = 1, \frac{1}{6}$$

$$(2) \quad \text{א. } x = -1 \quad \text{ב. } x = \frac{11}{4} \quad \text{ג. } x = 0 \quad \text{ד. } x = 1, -1$$

$$(3) \quad \text{א. } x = 0, \frac{1}{4} \quad \text{ב. } x = 1 \quad \text{ג. } x = 0, -\frac{1}{2} \quad \text{ד. } x = 0$$

מערכת משוואות מעריכיות:

שאלות:

$$(1) \quad \begin{cases} y = 3^x \\ y = 18 - 3^x \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 5^{2x} - 5^y = 5^x - 25 \\ y - x = 2 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{1}{3^y - 4} + \frac{3}{3^x - 2} - \frac{1}{3^x + 2} = 3 \\ 4^y = \sqrt{256^x} \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(4) \quad \begin{cases} 5^x + 2^y = 13 \\ 2 \cdot 5^x - 2^y = 2 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(5) \quad \begin{cases} 2 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^y = 42 \\ 3^{x+1} - 2^{y+1} = 73 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(6) \quad \begin{cases} 5^{2x+1} + 8 \cdot 10^x - 2^{2y+4} = 0 \\ (\sqrt{3})^y = 27^{\frac{x-1}{6}} \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$(7) \quad \begin{cases} 6 \cdot 4^x - 7 \cdot 6^{y-1} + 2 \cdot 3^{x+y} = 6^y \\ \sqrt[4]{5^x} \cdot \sqrt{(5\sqrt{5})^y} = \sqrt[4]{125} \cdot 5^x \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

תשובות סופיות:

(1,3) (4	(1,2) (3	(0,2) , (2,4) (2	(2,9) (1
(1,2) , (-1,0) (7	(-1,-2) (6	(3,2) (5	

אי שוויונים מעריכיים:

סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $a^x > a^y$ הוא: $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$\begin{array}{ll} \sqrt{2^x} \leq 4^{x^2-1\frac{1}{4}} & (2) \\ 3^{2x+1} < 27^{1-\frac{1}{3}x} & (1) \\ \left(\frac{1}{7}\right)^{5x} \geq \left(\frac{1}{7}\right)^{1-3x} & (4) \\ e^{\sqrt{x+1}} > e^{2x} & (3) \\ e^{2x} - 2e^x + 1 \leq 0 & (6) \\ 25^x + 5 < 6 \cdot 5^x & (5) \end{array}$$

הערה:

השאלות הבאות דורשות הכרות עם מושג הלוגריתם הטבעי ($\ln$) וכן חוקי הלוגריתמים אשר ילמדו בהמשך.

$$\begin{array}{ll} e^{2x} - 5e^x + 4 > 0 & (8) \\ e^x > 3 & (7) \end{array}$$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{ll} x \leq -1 \text{ או } x \geq 1\frac{1}{4} & (2) \\ x < \frac{2}{3} & (1) \\ x \leq \frac{1}{8} & (4) \\ 0 \leq x < 1 & (3) \\ x = 0 & (6) \\ 0 < x < 1 & (5) \\ x < 0 \text{ או } x > \ln 4 & (8) \\ x > \ln 3 & (7) \end{array}$$

אי-שוויונים עם משתנה בבסיס ובמעריך:

סיכום כללי:

דרך הפתרון של אי שוויון עם משתנה בבסיס ובמעריך:

- יש לדרוש בסיס חיובי ולחבר אי-שוויון בהתאם.
- יש לפתור את אי השוויון לפי השוואת מעריכים.
- יש למצוא את חיתוך הפתרונות.

נתון: $f(x)^{g(x)} > f(x)^{h(x)}$ נדרוש: $f(x) > 0$.

דרך הפתרון: אם: $f(x) > 1$ אז: $g(x) > h(x)$.

אם: $0 < f(x) < 1$ אז: $g(x) < h(x)$.

לבסוף נמצא את חיתוך התחומים.

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$(x-2)^{2x-5} < (x-2)^{x+1} \quad (2) \qquad x^{2x-1} > x^{x+2} \quad (1)$$

$$x^{2x^2+2} < x^{5x} \quad (4) \qquad x^{2x-6} < 1 \quad (3)$$

$$(x+1)^{|x|} < x^2 + 2x + 1 \quad (6) \qquad (x^2 - 6x + 13)^{x^2-2x} \geq (x^2 - 6x + 13)^3 \quad (5)$$

תשובות סופיות:

$$0 < x < 1, x > 3 \quad (1)$$

$$3 < x < 6 \quad (2)$$

$$1 < x < 3 \quad (3)$$

$$0 < x < 0.5, 1 < x < 2 \quad (4)$$

$$x \leq -1, x \geq 3 \quad (5)$$

$$0 < x < 2 \quad (6)$$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי א

פרק 6 - חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמים

תוכן העניינים

105	1. הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות
108	2. חוקי הלוגריתמים
112	3. חישובים עם חזקה לוגריתמית
113	4. מעבר בין בסיסים
115	5. הלוגריתם הטבעי
117	6. משוואות עם בסיסים שונים
118	7. מערכת משוואות לוגריתמיות
119	8. מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות
120	9. אי-שוויונים לוגריתמים

הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות:

סיכום כללי:

הגדרה:

הלוגריתם מוגדר באופן הבא: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ כאשר: $a, b > 0, a \neq 1$.

הסבר:

לוגריתם על בסיס a של b מוגדר בתור החזקה שיש להעלות את a על מנת שיהיה שווה ל- b .
 ערך חזקה זו הוא x . ערך לוגריתם יכול להיות חיובי, שלילי או אפס. נחשב ערכי לוגריתמים
 ונפתור משוואות לוגריתמיות ע"י מעבר לפי ההגדרה למשוואה מעריכית מתאימה.

כללים יסודיים בלוגריתמים:

מהגדרת הלוגריתם נובע כי: $\log_a a = 1$ וכן: $\log_a 1 = 0$ לכל $a > 0, a \neq 1$.

שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמים הבאים:

א. $\log_2 32$ ב. $\log 1000$ ג. $\log_{25} 5$

ד. $\log_8 4$ ה. $\log_4 \frac{1}{16}$ ו. $\log_a a^4$

ז. $\log_a \frac{1}{a\sqrt{a}}$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (יסודי - שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\log_{36} 6 = x$ ב. $\log_2 x = 16$

ג. $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$ ד. $\log_x 64 = 3$

ה. $\log_x 25 = 2$ ו. $\log_x (3x+4) = 2$

(3) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (כללי - שימוש בהגדרת הלוג):

$$\text{א. } \log_6(4x-2)=1 \quad \text{ב. } \log_4(4-x)=\frac{1}{2}$$

$$\text{ג. } \log_8(x^4-73)=1 \quad \text{ד. } \log_3 \frac{x+3}{3-3x}=-2$$

$$\text{ה. } \log_x(2x^2+x-12)=2 \quad \text{ו. } \log_{\sqrt{x+1}}(2x^2-5)=2$$

(4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג מספר פעמים):

$$\text{א. } \log_4(\log_3 x)=1 \quad \text{ב. } 3\log_{27}(\log_2(x+3))=1$$

$$\text{ג. } \log_{\frac{1}{16}}(\log_3(5x^2+1))=-\frac{1}{2} \quad \text{ד. } \log_6(3+\log_2(6+\log_4(x^2+15)))=1$$

(5) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

$$\text{א. } \log_2(3^x+37)=6 \quad \text{ב. } \log_3(3 \cdot 2^x-303)=4$$

$$\text{ג. } \log_5(126 \cdot 5^x-25)=2x+1 \quad \text{ד. } 3\log_2\left(3 \cdot 4^{1+\frac{1}{3}x}-11 \cdot 2^{\frac{x}{3}}+3\right)=12+2x$$

(6) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הצבה):

$$\text{א. } (\log_2 x)^4=10000 \quad \text{ב. } 2(\log_3 x)^2+\log_3 x=10$$

$$\text{ג. } \frac{3 \cdot \log_{14} x + 1}{(\log_{14} x)^2} = 4 \quad \text{ד. } \sqrt{\log_{\frac{1}{81}} x} + \sqrt{\log_{\frac{1}{81}} x + 2} = 2$$

תשובות סופיות:

- (1) א. 5 ב. 3 ג. $\frac{1}{2}$ ד. $\frac{2}{3}$ ה. -2
 ו. 4 ז. -1.5
- (2) א. $x = \frac{1}{2}$ ב. $x = 65,536$ ג. $x = 27$ ד. $x = 4$
 ה. $x = 5$ ו. $x = 4$
- (3) א. $x = 2$ ב. $x = 2$ ג. $x = \pm 3$ ד. $x = -2$ ה. $x = 3$ ו. $x = 2$
- (4) א. $x = 81$ ב. $x = 5$ ג. $x = \pm 4$ ד. $x = \pm 1$
- (5) א. $x = 3$ ב. $x = 7$ ג. $x = -1, 2$ ד. $x = -6$
- (6) א. $x = 1024, \frac{1}{1024}$ ב. $x = 9, \frac{1}{9\sqrt{3}}$
 ג. $x = 14, \frac{1}{\sqrt[4]{14}}$ ד. $x = \frac{1}{3}$

חוקי הלוגריתמים:

סיכום כללי:

- להלן 3 חוקי הלוגריתמים עבור בסיס $a > 0 \neq 1$ וארגומנטים x ו- y חיוביים:
- מכפלה לסכום: $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$.
 - מנה להפרש: $\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$.
 - מקדם למעריך: $\log_a b^n = n \log_a b$ (כאשר $b > 0$ ו- n מספר ממשי כלשהו).

שאלות:

שאלות חישוב כלליות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

א. $\log_3 12 + \log_3 2.25$	ב. $\log_{\frac{1}{5}} 40 + \log_{\frac{1}{5}} 12.5 + \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{4}$
ג. $\log_2 200 - \log_2 100$	ד. $\log_3 60 - \log_3 540$
ה. $\log_4 8 + \log_4 12 - \log_4 6$	ו. $\log_7 1.5 - \log_7 147 + \log_7 2$
ז. $3 \log_5 2 - \log_5 1.6$	ח. $\log_{\sqrt{4}} 6.4 + 2 \log_{\sqrt{4}} \sqrt{10}$
ט. $\frac{1}{2} \left(\log_7 \frac{7}{2} + \log_7 2 \right) + \log_7 14 - \frac{1}{3} \log_7 8$	י. $\frac{1}{4} \log 81 - \log 1.5 - \frac{1}{2} \log 40$

(2) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

א. $\frac{\log_5 16}{\log_5 8}$	ב. $\frac{\log_9 62.5 + \log_9 2}{\log_9 0.2}$
ג. $\frac{\log_3 5 - \log_3 2 + \log_3 50}{\log_3 225 - 2}$	ד. $\frac{2 - 2 \log_3 4 + \log_3 8^{\frac{8}{9}}}{4 - \log_3 0.01 - 2 \log_3 18}$

משוואות לוגריתמיות:

(3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש ישיר בחוקי הלוגריתמים):

א. $\log_2 x + \log_2 (x-6) = 4$ ב. $\log_3 x + \log_3 (x+2) = 1$

ג. $\log_2 (x+30) - \log_2 x = 4$ ד. $\log_5 (x+146) - \log_5 (x+2) = 2$

ה. $2\log_3 (2x-1) - \log_3 (22x+9) = -1$

ו. $2\log_5 (x-2) = \log_5 (4x-15) + \log_5 x$

(4) פתור את המשוואות הבאות (פתרון בשיטת לוג שווה לוג):

א. $\log_5 (4x-3) = \log_5 7$

ב. $2\log_2 (2x-2) - \log_2 (16-x) = \log_2 (x-1) + 1$

(5) פתור את המשוואות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

א. $\log_3 (3 \cdot 5^x + 39) = 3 + \log_3 (5^x - 3)$

ב. $\log_2 (3 - 4^{x+1}) - \log_2 11 = x$

(6) פתור את המשוואות הבאות (שימוש הפוך בחוקי הלוגריתמים):

א. $\log_4 x \cdot \log_4 (16x) = 8$

ב. $\log_2 \left(\frac{x}{4} \right) \cdot \log_2 (1024x) = -11$

ג. $\log_2 x^2 \log_2 \left(\frac{x}{16} \right) = -\log_2 (64x)$

ד. $(\log_4 4x)^2 = \log_4 4x^2 + 1$

ה. $\log_3 (9x^2) \cdot \log_3 (9x^3) = \log_3 \left(\frac{81}{x} \right) + 2$

ו. $\frac{\log_2 \left(\frac{x^3}{32} \right)}{(\log_2 x)^2} + \frac{\log_2 (2x)}{\log_2 x} = 1\frac{7}{9}$

שאלות הבעה:

(7) נתון: $\log_3 2 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

- א. $\log_3 16$ ב. $\log_3 6$
ג. $\log_3 24$ ד. $\log_3 1.5$

(8) נתון: $\log_2 3 = a$, $\log_2 5 = b$. הבע באמצעות a ו- b את ערכי הביטויים הבאים:

- א. $\log_2 45$ ב. $\log_2 60$ ג. $\log_2 \sqrt{7.5}$

(9) נתון: $\log_{18} 2 + \log_{18} 3 = a$.

הבע באמצעות a את $\log_{18} 27$ ואת $\log_{18} 16$.

שאלות נוספות:

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

$$\log 4 \log 40 + \log 5 \log 16 = \log 64 \quad (10)$$

$$2 \log^2 2 + \log 25 \cdot \log 20 = 2 \quad (11)$$

$$\log_{12} 16 \cdot \log_{12} 4 + \log_{12} 9 \cdot \log_{12} 48 = 2 \quad (12)$$

$$\log_5 10 \cdot \log_5 75 - \log_5 3 \cdot \log_5 2 - \log_5 3 - \log_5 4 = 2 \quad (13)$$

תשובות סופיות:

(1) א. 3 ב. -3 ג. 1 ד. -2 ה. 2
ו. -2 ז. 1 ח. 6 ט. 1.5 י. -0.5

(2) א. $\frac{4}{3}$ ב. -3 ג. 1.5 ד. 0.5

(3) א. $x = \frac{1}{4}, 256$ ב. $x = 3, \frac{1}{27}$ ג. $x = 2$ ד. $x = 4$ ה. $x = 3$ ו. $x = 4$

(4) א. $x = 2.5$ ב. $x = 6$

(5) א. $x = 1$ ב. $x = -2$

(6) א. $x = 16, \frac{1}{256}$ ב. $x = 2, \frac{1}{512}$ ג. $x = 4, 2\sqrt{2}$ ד. $x = 4, \frac{1}{4}$

ה. $x = \frac{1}{9}, \sqrt[6]{3}$ ו. $x = 8, \sqrt[7]{2^{15}}$

(7) א. $4a$ ב. $a+1$ ג. $3a+1$ ד. $1-a$

(8) א. $2a+b$ ב. $2+a+b$ ג. $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}$

(9) $4(2a-1), 3(1-a)$

(10) הוכחה.

(11) הוכחה.

(12) הוכחה.

(13) הוכחה.

חישובים עם חזקה לוגריתמית:

סיכום כללי:

מהגדרת הלוגריתם ניתן לנסח את הקשר הבא: $a^{\log_a x} = x$ כאשר $a > 0 \neq 1$.

שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

א. $6^{\log_6 8}$ ב. $4^{\log_2 5}$

(2) נתונה התבנית: $3 \cdot 4^x$. חשב את ערכה עבור:

א. $x = \log_4 7$ ב. $x = \log_4 \sqrt{3}$
 ג. $x = 2\log_4 0.1$ ד. $x = \sqrt{\log_2 5}$

(3) נתונה התבנית: $\frac{1}{6} \cdot 9^x - 2 \cdot 3^x + 1$. חשב את ערכה עבור:

א. $x = -1$ ב. $x = \log_3 5$
 ג. $x = \log_3 \sqrt{6}$

(4) חשב:

א. $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_{\sqrt{6}} 81}$ ב. $\sqrt[3]{2^{3-\log_{\sqrt{6}} 5}}$

תשובות סופיות:

(1) א. 8 ב. 25

(2) א. 21 ב. $3\sqrt{3}$ ג. 0.03 ד. 15

(3) א. $\frac{19}{54}$ ב. $-4\frac{5}{6}$ ג. $2 - 2\sqrt{6}$

(4) א. $\frac{1}{81}$ ב. $\frac{2}{\sqrt[9]{25}}$

מעבר בין בסיסים:

סיכום כללי:

מעבר מבסיס a לבסיס m (כאשר: $a > 0 \neq 1$ ו- $m > 0 \neq 1$, וכן: $b > 0$)

$$\log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a} \quad \text{יתבצע באופן הבא:}$$

שאלות:

שאלות חישוב כלליות:

(1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \log_4 7 \cdot \log_7 4 \\ \text{ב.} & \log_{0.1} 3 \cdot \log_9 1000 \\ \text{ג.} & \log_{\sqrt{3}} 5 \cdot \log_{\sqrt{125}} 9 \\ \text{ד.} & \log_4 169 \cdot \log_{25} 64 \cdot \log_{13} 625 \end{array}$$

(2) הוכח את השוויונים הבאים:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \log_2 25 \cdot \log_5 3 \cdot \log_9 2 = 1 \\ \text{ב.} & \log_{16} 9 \cdot \log_5 4 \cdot \log_3 5 = 1 \end{array}$$

משוואות לוגריתמיות:

(3) פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \log_2 x + \log_{32} x = 6 \\ \text{ב.} & \log_3 x \cdot \log_{27} x = 3 \\ \text{ג.} & \log_2 4x \cdot \log_8 \frac{x}{16} = -\frac{5}{3} \\ \text{ד.} & \log_x 5 - 6 \log_{125} x = 1 \end{array}$$

שאלות הבעה:

(4) נתון: $\log_4 6 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

$$\text{א.} \log_2 3 \quad \text{ב.} \log_{32} 36 \quad \text{ג.} \log_{216} 96$$

(5) נתון: $\log_2 3 = a$, $\log_3 5 = b$. הבע באמצעות a ו- b את ערכי הביטויים הבאים:

$$\text{א.} \log_3 50 \quad \text{ב.} \log_2 \sqrt{30} \quad \text{ג.} \log_5 22.5$$

(6) נתון $\log_3 7 = a$, $\log 9 = 2b$. הבע באמצעות a ו- b את:

א. $\log 21$.

ב. $\log_3 \left(\frac{10}{7} \right)$.

ג. $\log_7 10$.

ד. $\log_{30} 63$.

שאלות נוספות:

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

(7) $\log_6 9 \cdot \log_{15} 30 + \log_6 5 \cdot \log_{15} 4 = 2$

(8) $\log \sqrt{3} \cdot \log_6 50 + \log \sqrt{2} \cdot \log_6 300 = 1$

תשובות סופיות:

(1) א. 1 ב. -1.5 ג. $2\frac{2}{3}$ ד. 12.

(2) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

(3) א. $x = 32$ ב. $x = 27, \frac{1}{27}$ ג. $x = 8, \frac{1}{2}$ ד. $x = \frac{1}{5}, \sqrt{5}$.

(4) א. $2a - 1$ ב. $0.8a$ ג. $\frac{a+2}{3a}$

(5) א. $2b + \frac{1}{a}$ ב. $\frac{a}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{1}{2}$ ג. $\frac{2}{b} + 1 - \frac{1}{ab}$

(6) א. $b + ab$ ב. $\frac{1}{b} - a$ ג. $\frac{1}{ab}$ ד. $\frac{ab+2b}{b+1}$.

(7) הוכחה.

(8) הוכחה.

הלוגריתם הטבעי:

סיכום כללי:

לוגריתם על בסיס e (קבוע אוילר) מסומן: $\log_e \Rightarrow \ln$ והוא נקרא הלוגריתם הטבעי.
 למשל: $\ln 3 = \log_e 3$ או $\ln \frac{1}{4} = \log_e \frac{1}{4}$. לוג זה נקרא בשם לן.
 מהגדרת הלוגריתם מתקיים: $\ln a = b \rightarrow e^b = a$ כאשר $a > 0$ ו- b מספרים כלשהם.

שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמיים הטבעיים הבאים:

$$\text{א. } \ln e^2 \quad \text{ב. } \ln \frac{1}{e^4} \quad \text{ג. } \ln \frac{1}{e\sqrt{e}}$$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג):

$$\text{א. } \ln x = 2 \quad \text{ב. } \ln x = -\frac{1}{2}$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (הצבה וחוקי הלוגריתמים):

$$\begin{aligned} \text{א. } \ln\left(e^{2x} - \frac{1}{2}\right) + \ln 2 &= x \\ \text{ב. } 3\ln^2 x + \ln x &= 2 \\ \text{ג. } \ln(e^2 x^3) \cdot \ln \frac{1}{x} &= \ln(ex^2) \end{aligned}$$

(4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הוצאת לוג משני אגפי המשוואה)

$$\text{א. } x^{\ln x} = e^6 x \quad \text{ב. } \left(\frac{1}{x}\right)^{2-3\ln x} = \frac{1}{e} \cdot x^{1+\ln x}$$

(5) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

$$\text{א. } e^{\ln 3} \quad \text{ב. } e^{2\ln 3}$$

תשובות סופיות:

- (1) א. 2 ב. -4 ג. -1.5
- (2) א. $x = e^2$ ב. $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$
- (3) א. $x = 0$ ב. $x = \sqrt[3]{e^2}, \frac{1}{e}$ ג. $x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}, \frac{1}{e}$
- (4) א. $x = e^3, \frac{1}{e^2}$ ב. $x = \sqrt{e}, e$
- (5) א. 3 ב. 9

משוואות עם בסיסים שונים:

סיכום כללי:

לעיתים תתקבל משוואה מעריכית שבה לא ניתן למצוא חזקה שלמה, כגון: $3^x = 4$. במקרים אלו נעזר בהגדרת הלוג כדי לבטא את ערך המעריך: $x = \log_3 4$. את ערך הביטוי $\log_3 4$ ניתן לחשב ע"י מחשבון או ע"י מעבר לבסיס 10: $\log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3}$.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (בסיסים שונים):

א. $3^x = 6$ ב. $2^x - 9 = 0$

ג. $49^x - 8 \cdot 7^x + 15 = 0$ ד. $2 \cdot 3^{\frac{2x}{3}} + 5 \cdot 3^{\frac{x}{3}} + 2 = 0$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם בסיס ולוגריתם טבעי):

א. $e^{3x} = 3$ ב. $4 + 3e^x = 9$

ג. $3e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$ ד. $e(e^x + 1) = 2\sqrt{e^{x+2}} + 9e$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם פתרונות לא שלמים):

א. $\log_2(7 - 5^x) = \log_2 \frac{10}{5^x}$ ב. $\log_2(4e^{2x} + 6) - 1 = \log_2(7e^x)$

תשובות סופיות:

(1) א. $x = \log_3 6 = 1.63$ ב. $x = \log_2 9 = 3.17$

ג. $x = \log_7 3 = 0.564$, $x = \log_7 5 = 0.827$ ד. אין פתרון.

(2) א. $x = \frac{1}{3} \ln 3 = 0.36$ ב. $x = \ln \frac{5}{3} = 0.51$ ג. $x = 0$, $x = -\ln 3 = -1.09$

ד. $x = \ln 16 = 2.7725$

(3) א. $x = 1$, $x = \log_5 2 = 0.43$ ב. $x_1 = \ln \frac{1}{2} = -0.693$, $x = \ln 3 = 1.098$

מערכת משוואות לוגריתמיות:

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} \log_6^2 x - \log_6(2y-2) = 2 \\ \frac{1}{2}x = y-1 \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} y = \log_2 x \\ y = 6 - \log_2 x \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \log_3(x+y) = \log_3(4x+y) - 2 \\ \log_5(5x+3y) = 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \log_2(\log_3(x-y)) = 1 \\ \log_5(x+y-11) = \log_{25} x + \frac{1}{2}\log_5(y+2) \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \log_2 x^2 + \log_3 \frac{1}{y} = 9 \\ \log_2 \sqrt{x} + \log_{\sqrt[3]{3}} y = -1 \end{cases} \quad (6) \qquad \begin{cases} \log_5 x + 6\log_4 y = 11 \\ 10\log_5 x - 2\log_4 y = 17 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} xy = 27 \\ x^{\log_3 y} = 9 \end{cases} \quad (8) \qquad \begin{cases} \log_5 x + 2^{\log_2 y} = 6 \\ x^y = 5^8 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} 2^{\frac{\log_1(2x-y)}{2}} = 7^{\log_7 \frac{2x+y}{15}} \\ \log_3 x + \log_3 y = \frac{1}{\log_{28} 3} \end{cases} \quad (9)$$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{lll} (8, -5) & (3) & (36, 19), \left(\frac{1}{6}, 1\frac{1}{12}\right) & (2) & (8, 3) & (1) \\ \left(16, \frac{1}{3}\right) & (6) & (25, 8) & (5) & (16, 7) & (4) \\ (4, 7) & (9) & (3, 9), (9, 3) & (8) & (25, 4), (625, 2) & (7) \end{array}$$

מערכת משוואות לוגריתמיות ומעריכיות:

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 25^y = (5\sqrt{5})^{x+1} \\ \log_5 \sqrt{x} + \log_5 \sqrt{y} = \log_5 3 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} y = \log_2 (4^x - 2) \\ y = 2x - 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x \cdot \log_2 3 = \frac{y}{\log_9 2} \\ \log_3 (9^x + 27) = 2y + \log_3 12 \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} 3y + 5 \log_6 x = 1 \\ 216 \cdot x^{2-y} = 6^{1-4y} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x = \log_4 (5 - 9^y) \\ \log_2 (2^x + 3) = \log_4 (29 - (3^y - 3)^2) \end{cases} \quad (6) \quad \begin{cases} (2^x - 1)^2 - 4y + 3 = 0 \\ x = \log_2 (y + 1) \end{cases} \quad (5)$$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{lll} (36, -3), \left(6, -1\frac{1}{3}\right) & (3, 3) & (1, 1) \\ (1, 0) & (1, 1), (2, 3) & \left(1, \frac{1}{2}\right), (2, 1) \end{array} \quad \begin{matrix} (3) & (2) & (1) \\ (6) & (5) & (4) \end{matrix}$$

אי-שוויונים לוגריתמים:

סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $\log_a x > \log_a y$ הוא: $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

- | | |
|---|-----------------------------------|
| $\log_6 (x^2 - 5x) < 1$ (2) | $\log_2 x < \log_2 (5x - 20)$ (1) |
| $\log_{\frac{1}{2}} (1 - 3x) \geq \log_{\frac{1}{2}} (7 - x)$ (4) | $\log_3 x > \log_9 (15 - 2x)$ (3) |
| $\ln x < 3$ (6) | $\ln x \geq \ln (x^2 - 12)$ (5) |
| $\frac{6}{\ln^2 x} \geq 2 - \frac{1}{\ln x}$ (8) | $\ln^2 x - 6 \ln x < 7$ (7) |

תשובות סופיות:

- | | |
|---|-----------------------------|
| $-1 < x < 0, 5 < x < 6$ (2) | $x > 5$ (1) |
| $-3 \leq x \leq \frac{1}{3}$ (4) | $3 < x < 7\frac{1}{2}$ (3) |
| $0 < x < e^3$ (6) | $2\sqrt{3} < x \leq 4$ (5) |
| $x \neq 1$ וגם $\frac{1}{\sqrt{e^3}} \leq x \leq e^2$ (8) | $\frac{1}{e} < x < e^7$ (7) |

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי א

פרק 7 - טריגונומטריה במשולש ישר זווית

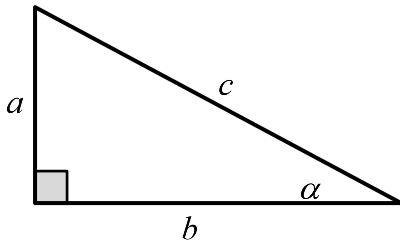
תוכן העניינים

1. משולש ישר זווית 121

משולש ישר זווית:

סיכום כללי:

הגדרות הפונקציות הטריגונומטריות:



$$\sin \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{a}{c}$$

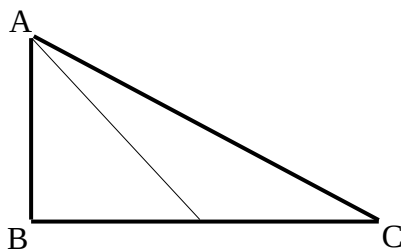
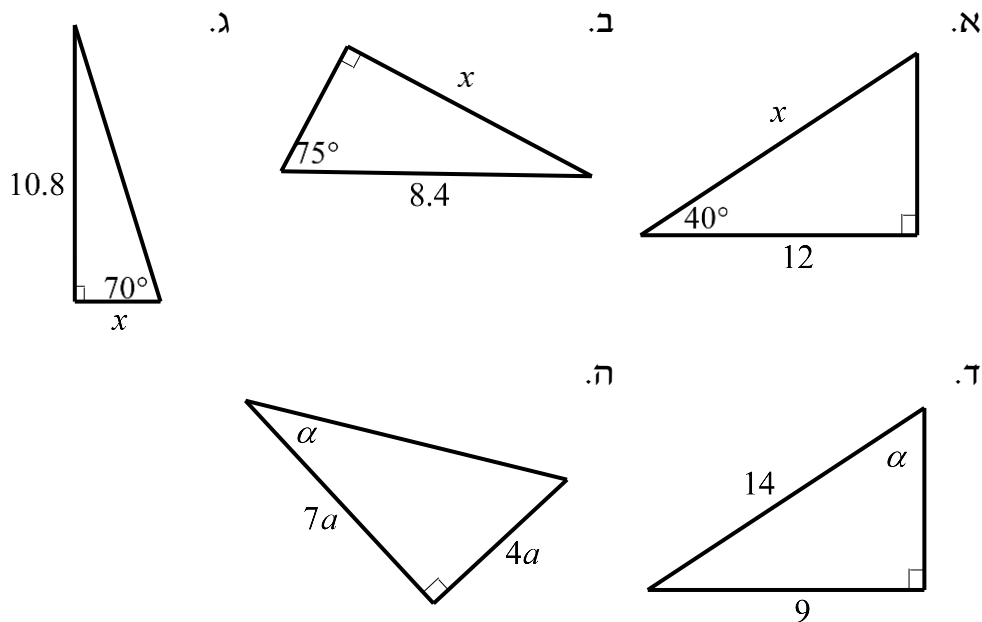
$$\cos \alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{הניצב שליד הזווית}} = \frac{a}{b}$$

$$a^2 + b^2 = c^2: \text{משפט פיתגורס}$$

שאלות:

1) מצא את ערכו של α / x במשולשים ישרי הזווית הבאים:



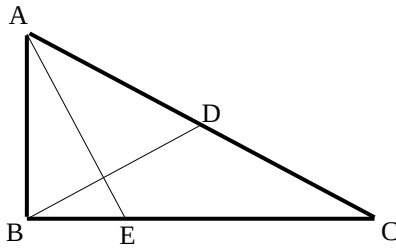
2) המשולש ABC שבציור הוא משולש

ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$).

AD הוא התיכון לניצב BC.

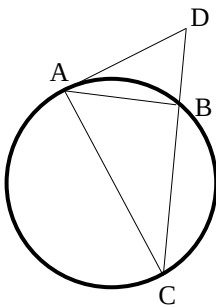
נתון: $\angle C = 28^\circ$, $AB = 6$ ס"מ.

מצא את AD ואת $\angle BAD$.



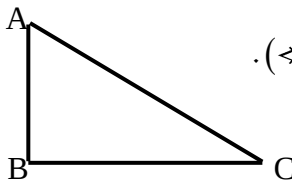
- (3) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$). BD הוא התיכון ליתר AC והוא חוצה הזווית $\angle A$. נתון: $BD = 5.6$ ס"מ, $BC = 8$ ס"מ. מצא את BE ואת $\angle BAE$.

- (4) מצא את זוויתיו של מעוין שאורכי אלכסונו 24 ס"מ ו-18 ס"מ.

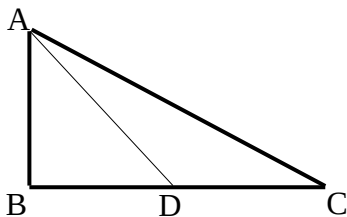


- (5) המשולש ABC חסום במעגל כך שהצלע AC היא קוטר המעגל. המשיק למעגל בנקודה A והמשך הצלע CB נפגשים בנקודה D. נתון: $\angle DAB = 32^\circ$, $BD = 4$ ס"מ. מצא את אורכו של רדיוס המעגל.

- (6) במשולש שווה שוקיים שבו השוק ארוכה ב-4 ס"מ מהבסיס נתון כי זווית הראש היא 34.92° . מצא את שטח המשולש.

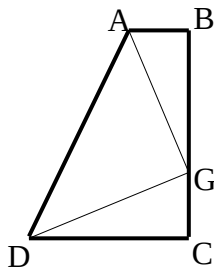


- (7) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$). נתון: $AB = a$, $\angle A = \alpha$. הבע באמצעות α ו- a את היקף המשולש.

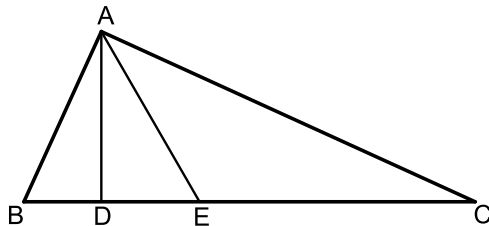


- (8) המשולש ABC שבציור הוא משולש ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$). AD הוא התיכון לניצב BC. נתון: $AB = b$, $\angle C = \alpha$. הבע באמצעות α ו- b את אורכי הקטעים BD ו-AD.

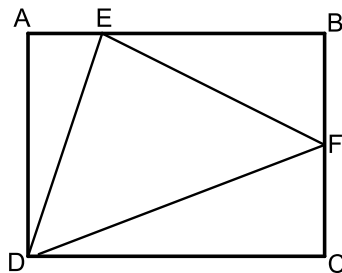
- (9) במשולש ישר זווית אחת הזוויות החדות היא α ואורך חוצה זווית זו הוא k . הבע באמצעות α ו- k את שטח המשולש ואת אורך היתר.



- (10)** טרפז ABCD הוא טרפז ישר זווית ($\angle B = \angle C = 90^\circ$). הנקודה G נמצאת על השוק BC כך ש- $AG \perp DG$. נתון: $\angle BAG = \beta$, $AG = DG = m$. הבע באמצעות β ו- m את שטח הטרפז.



- (11)** המשולש ABC הוא ישר זווית ($\angle A = 90^\circ$). הקטעים AD ו- AE הם בהתאמה גובה ליתר וחוצה זווית. מסמנים: $\angle DAE = \alpha$, $DE = k$.
א. הבע באמצעות k ו- α את שטח המשולש ABC.
ב. חשב את שטח המשולש ABC אם ידוע כי: $\alpha = 30^\circ$ ו- $k = 2$.

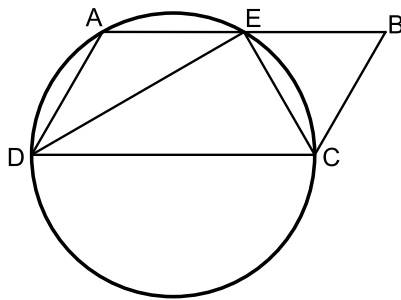


- (12)** במלבן ABCD מסמנים את הנקודות E ו- F הנמצאות על הצלעות AB ו- BC בהתאמה כך ש- $AE = BE$. מקיימת: $3AE = BE$ ו- F היא אמצע הצלע BC. אורך הצלע AD שווה לאורך הקטע BE. מעבירים את הקטעים EF, DF ו- DE כך שנוצר במשולש DEF.
א. סמן ב- t את אורך הקטע AE והבע באמצעות t את אורכי צלעות המשולש DEF.
ב. חשב את זוויות המשולש EDF.

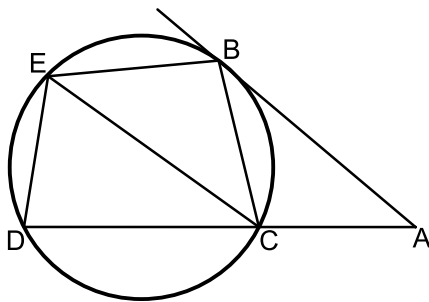
- (13)** משולש שווה שוקיים שאורך שוקו k וזווית הבסיס שלו היא β חוסם מעגל. הבע באמצעות β ו- k את רדיוס המעגל.

- (14)** בטרפז ישר זווית חסום מעגל. אורך השוק הארוכה בטרפז היא b והזווית שהיא יוצרת עם הבסיס הגדול היא α . הבע באמצעות α ו- b את אורכו של הבסיס הגדול בטרפז ואת שטחו.

הערה: השאלות הבאות משלבות ידע בגיאומטריה ובטריגונומטריה יחד:



- 15** דרך הקודקודים A, C ו-D של המקבילית ABCD מעבירים מעגל. היקף המעגל חוצה את הצלע AB בנקודה E, $(AE = BE)$. נתון כי DC הוא קוטר במעגל וכי המיתר DE חוצה את זווית D.
- הוכח כי המיתר CE חוצה את זווית C.
 - רדיוס המעגל יסומן ב- R. הבע באמצעות R את היקף המקבילית.
 - מצא את רדיוס המעגל אם ידוע כי שטח המקבילית הוא $16\sqrt{3}$ סמ"ר.



- 16** מהנקודה A שמחוץ למעגל מעבירים משיק AB וישר חותך ACD. מעבירים את המיתרים BC ו-BE, אשר זהים באורכם. כמו כן מעבירים את המיתר DE. אורך המיתר CE שונה מאורך המשיק AB.
- הוכח כי המרובע ABEC הוא טרפז.
 - הוכח כי: $\angle BEC = 2 \cdot \angle EDC$.
 - נתונים: $\angle A = 40^\circ$, $AC = 6$ ס"מ, $AB = 9$ ס"מ, $CE = 8$ ס"מ. חשב את שטח המרובע ABEC.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } x = 15.665 \quad \text{ב. } x = 8.114 \quad \text{ג. } x = 3.931 \quad \text{ד. } \alpha = 40.005^\circ \quad \text{ה. } \alpha = 29.745^\circ$$

$$(2) \quad \angle BAD = 43.24^\circ, AD = 8.236 \text{ ס"מ}$$

$$(3) \quad \angle BAE = 22.792^\circ, BE = 3.294 \text{ ס"מ}$$

$$(4) \quad 106.26^\circ, 73.74^\circ, 73.74^\circ, 106.26^\circ$$

$$(5) \quad R = 6.04 \text{ ס"מ}$$

$$(6) \quad S = 28.618 \text{ סמ"ר}$$

$$(7) \quad P = a \left(1 + \tan \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right)$$

$$(8) \quad AD = \sqrt{b^2 + \frac{b^2}{4 \tan^2 \alpha}}, \quad BD = \frac{b}{2 \tan \alpha}$$

$$(9) \quad AC = \frac{k \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}, \quad S = \frac{k^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \tan \alpha}{2}$$

$$(10) \quad \frac{(m \sin \beta + m \cos \beta)^2}{2}$$

$$(11) \quad \text{א. } S = \frac{k^2}{\cos 2\alpha \tan^2 \alpha} \quad \text{ב. } 24 \text{ סמ"ר}$$

$$(12) \quad \text{א. } DE = t\sqrt{10}, EF = t\sqrt{11.25}, DF = t\sqrt{18.25} \quad \text{ב. } 81.86^\circ, 51^\circ, 47.14^\circ$$

$$(13) \quad R = k \cos \beta \tan \frac{\beta}{2}$$

$$(14) \quad \frac{1}{2} b \sin \alpha + \frac{\frac{1}{2} b \sin \alpha}{\tan \frac{\alpha}{2}}, \quad S = \frac{1}{2} b^2 \sin \alpha (1 + \sin \alpha)$$

$$(15) \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. } 6R \quad \text{ג. } 4 \text{ ס"מ}$$

$$(16) \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. שאלת הוכחה.} \quad \text{ג. } 32.78 \text{ סמ"ר}$$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי א

פרק 8 - זהויות טריגונומטריות

תוכן העניינים

126	1. זהויות יסוד
130	2. ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות
132	3. מעגל היחידה
135	4. סכום והפרש זוויות
139	5. זווית כפולה
142	6. סכום והפרש פונקציות
145	7. מכפלת פונקציות

זהויות יסוד:

סיכום כללי:

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$	$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$	קשרים בין פונקציות
$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ $\tan \alpha = \cot(90^\circ - \alpha)$	$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$ $\cot \alpha = \tan(90^\circ - \alpha)$	זוויות משלימות ל- 90°
$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$	$\cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$	

שאלות:

הוכחת זהויות יסודיות:

הוכח את הזהויות הבאות תוך שימוש בזהויות היסוד:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1 \quad (2) & \tan \alpha \cdot \cos \alpha = \sin \alpha \quad (1) \\
 & \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos^2 \alpha \quad (4) & \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \tan \alpha \quad (3) \\
 & (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2 \quad (6) & \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} = 2 \quad (5) \\
 & \sin^2(\alpha + 45^\circ) + \sin^2(45^\circ - \alpha) = 1 \quad (8) & \frac{\cos(90^\circ - \alpha)}{\cos \alpha} = \tan \alpha \quad (7) \\
 & \frac{\sin \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^3 \alpha} = \tan^3 \alpha \quad (10) & \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \tan \alpha \quad (9) \\
 & \cos^2 \alpha (1 + \tan^2 \alpha) = 1 \quad (12) & \frac{\sin(90^\circ - \alpha) - \cos^3 \alpha}{\sin^3 \alpha} = \cot \alpha \quad (11) \\
 & \frac{\sin^3 \alpha}{\sin(90^\circ - \alpha) - \cos^3 \alpha} = \tan \alpha \quad (14) & \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \cot \alpha \quad (13) \\
 & \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha \quad (16) & \tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha \sin^2 \alpha \quad (15)
 \end{aligned}$$

הוכחות מתקדמות:

$$(17) \quad \frac{1+\cos \alpha}{1-\cos \alpha} + \frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha} = 2 + 4 \cot^2 \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(18) \quad \frac{1+\tan \alpha}{1-\tan \alpha} + \frac{1-\tan \alpha}{1+\tan \alpha} = \frac{2}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(19) \quad (\cot \alpha - \tan \alpha)(\cot \alpha + \tan \alpha) = (1 + \cot^2 \alpha)(1 + \tan^2 \alpha) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(20) \quad \frac{\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \cot^4 \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(21) \quad 1 - \sin^2 \alpha (1 + \cos^2 \alpha) = \cos^4 \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(22) \quad \left(\sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{1-\cos \alpha}} + \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha}} \right)^2 = 4 + 4 \cot^2 \alpha \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(23) \quad \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

$$(24) \quad \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\cot \alpha + \cot \beta} = \tan \alpha \tan \beta \quad \text{הוכח את הזהות הבאה:}$$

הבעת ביטויים וחישובים באמצעות זהויות יסוד:

$$(25) \quad \sin \alpha + \cos \alpha = k \quad \text{נתון כי:}$$

הבע באמצעות k את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$

ב. $\sin \alpha - \cos \alpha$

ג. $\tan \alpha + \cot \alpha$

ד. $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$

$$(26) \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \text{נתון כי:}$$

מבלי למצוא את α חשב את: $\tan^2 \alpha - 2 \cot^2 \alpha$

(27) נתון כי: $\tan \alpha = \sqrt{7}$.

מבלי למצוא את α חשב את: $\frac{\sqrt{7} \sin \alpha + 6 \cos \alpha}{\sqrt{28} \sin \alpha - \cos \alpha}$.

(28) חשב את ערך המכפלה הבאה: $\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \cdot \dots \cdot \tan 88^\circ \cdot \tan 89^\circ$.

תשובות סופיות:

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) שאלת הוכחה.
- (3) שאלת הוכחה.
- (4) שאלת הוכחה.
- (5) שאלת הוכחה.
- (6) שאלת הוכחה.
- (7) שאלת הוכחה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) שאלת הוכחה.
- (11) שאלת הוכחה.
- (12) שאלת הוכחה.
- (13) שאלת הוכחה.
- (14) שאלת הוכחה.
- (15) שאלת הוכחה.
- (16) שאלת הוכחה.
- (17) שאלת הוכחה.
- (18) שאלת הוכחה.
- (19) שאלת הוכחה.
- (20) שאלת הוכחה.
- (21) שאלת הוכחה.
- (22) שאלת הוכחה.
- (23) שאלת הוכחה.
- (24) שאלת הוכחה.

$$(25) \text{ א. } \frac{k^2 - 1}{2} \quad \text{ב. } \pm\sqrt{2 - k^2} \quad \text{ג. } \frac{2}{k^2 - 1} \quad \text{ד. } \frac{k}{2}(3 - k^2)$$

$$(26) -7.75$$

$$(27) 1$$

$$(28) 1$$

ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות:

סיכום כללי:

$\alpha = 90^\circ$	$\alpha = 60^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 0^\circ$	
1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\sin \alpha$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\cos \alpha$
ϕ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\tan \alpha$
0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ϕ	$\cot \alpha$

הערות:

- ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות של 0° ו- 90° תלמדנה בהמשך אך ניתנו כעת כדי להשלים את תמונת ערכי הזוויות.
- ניתן לזכור את הטבלה ע"י כתיבה של שורת הסינוס לפי: $\frac{\sqrt{4}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{0}}{2}$ אשר נותנים את הערכים של השורה הראשונה לאחר פישוט קל. עבור שורת ה- $\cos \alpha$ יש להפוך את הערכים ולבסוף יש לחלק כל זוג ביטויים כדי לכתוב את ערכי $\tan \alpha$ ולסובב עבור ערכי $\cot \alpha$.

שאלות:

חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בערכי הפונקציות הטריגונומטריות של זוויות מיוחדות:

$$(1) \sin 30^\circ + \cos 30^\circ$$

$$(2) \frac{\sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ}{\sin 60^\circ}$$

$$(3) \tan 45^\circ + \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ}$$

$$\cdot \frac{1 + \cos 60^\circ}{2 \sin 60^\circ} \quad (4)$$

$$\cdot \cos^2 45^\circ + \sin^2 30^\circ \quad (5)$$

$$\cdot \frac{\tan^2 60^\circ \cdot \cos^2 30^\circ}{\cos^2 60^\circ} \quad (6)$$

$$\cdot \frac{\tan 30^\circ \cdot \cot 60^\circ - \cot 45^\circ \cdot \tan 45^\circ}{4 \left(\sin^2 60^\circ - \frac{1}{4} \right)} \quad (7)$$

$$\cdot \frac{27 \cot^4 60^\circ}{\sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ \cdot \tan 60^\circ} \quad (8)$$

תשובות סופיות:

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 \quad (3)$$

$$\frac{3}{2\sqrt{3}} \quad (4)$$

$$\frac{3}{4} \quad (5)$$

$$9 \quad (6)$$

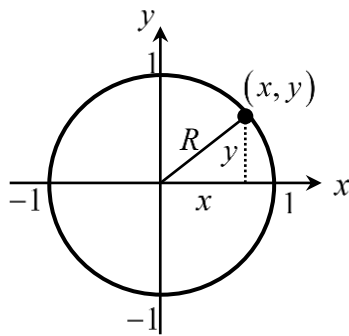
$$-\frac{1}{3} \quad (7)$$

$$2\sqrt{6} \quad (8)$$

מעגל היחידה – הגדרה וזהויות:

סיכום כללי:

הגדרת מעגל היחידה:



- מעגל קונוי שרדיוסו 1 מוגדר להיות המעגל הטריגונומטרי.
- הנקודות $(0, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ מתאימות לזוויות של 270° , 180° , 90° , 0° .

הזהויות של המעגל הטריגונומטרי:

רביע	סינוס	קוסינוס	טנגנס
II	$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$	$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$	$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$
III	$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$	$\tan(180^\circ + \alpha) = \tan \alpha$
VI	$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$
סימנים			

זהויות עבור זווית הגדולות מ-360 מעלות:

ניתן להוסיף או להוריד 'סיבובים' שלמים לזווית לפי:

$$\boxed{\begin{matrix} \sin(\alpha + 360^\circ k) = \sin \alpha \\ \cos(\alpha + 360^\circ k) = \cos \alpha \end{matrix}}, \quad \boxed{\begin{matrix} \tan(\alpha + 180^\circ k) = \tan \alpha \\ \cot(\alpha + 180^\circ k) = \cot \alpha \end{matrix}}$$

כאשר k הוא מספר שלם מציין את מספר הסיבובים.

שאלות:

(1) העבר את הביטויים הבאים לביטויים עם זווית ברביע הראשון.
אין צורך לחשב את ערך הביטוי:

א. $\sin 120^\circ$	ב. $\cos 150^\circ$
ג. $\tan 160^\circ$	ד. $\cot 130^\circ$
ה. $\sin 215^\circ$	ו. $\cos 245^\circ$
ז. $\tan 230^\circ$	ח. $\cot 200^\circ$
ט. $\sin 300^\circ$	י. $\cos 310^\circ$

(2) חשב את ערכי הביטויים הבאים ע"י שימוש בזהויות המעגל הטריגונומטרי:

א. $\sin 150^\circ$	ב. $\cos 210^\circ$	ג. $\tan 120^\circ$
ד. $\sin 330^\circ$	ה. $\tan 225^\circ$	ו. $\sin 315^\circ$
ז. $\cos 120^\circ$	ח. $\tan(-30^\circ)$	ט. $\cos(-45^\circ)$
י. $\sin 510^\circ$	יא. $\cos 930^\circ$	יב. $\tan(-225^\circ)$

(3) חשב את ערכי הביטויים הבאים ללא שימוש במחשבון:

$$\begin{aligned} \text{א. } & (\sin 240^\circ \cdot \tan 150^\circ + \cos(-60^\circ))^2 \\ \text{ב. } & 8\sin^2 150^\circ \cdot \tan 135^\circ - 2 \cdot \sin 135^\circ \cdot \cos(-135^\circ) \\ \text{ג. } & \frac{\cot 225^\circ}{\sin(-225^\circ) - \cos 135^\circ} + \tan^2 210^\circ \end{aligned}$$

(4) הוכח כי אם α, β ו- γ הן זוויות במשולש, אז מתקיים:

$$\begin{aligned} \text{א. } & \sin(\alpha + \beta) = \sin \gamma \\ \text{ב. } & \sin\left(\frac{\gamma + \beta}{2}\right) = \cos \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \begin{array}{llll} \text{א. } \sin 60^\circ & \text{ב. } -\cos 30^\circ & \text{ג. } -\tan 20^\circ & \text{ד. } -\cot 50^\circ \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{ה. } -\sin 35^\circ & \text{ו. } -\cos 65^\circ & \text{ז. } \tan 50^\circ & \text{ח. } \cot 20^\circ \end{array}$$

$$\text{ט. } -\sin 60^\circ \quad \text{י. } \cos 50^\circ$$

$$(2) \quad \begin{array}{llll} \text{א. } \frac{1}{2} & \text{ב. } -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{ג. } -\sqrt{3} & \text{ד. } -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{ה. } 1 & \text{ו. } -\frac{\sqrt{2}}{2} & \text{ז. } -\frac{1}{2} & \text{ח. } -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{ט. } \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{י. } \frac{1}{2} & \text{יא. } -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{יב. } -1 \end{array}$$

$$(3) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } 1 & \text{ב. } -1 \end{array} \quad \text{ג. } \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}$$

$$(4) \quad \text{שאלת הוכחה.}$$

סכום והפרש זוויות:

סיכום כללי:

סכום והפרש עבור $\sin(\alpha \pm \beta)$ ו- $\cos(\alpha \pm \beta)$ יחושב לפי:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

סכום והפרש עבור $\tan(\alpha \pm \beta)$ ו- $\cot(\alpha \pm \beta)$

$$\begin{aligned}\tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta} \\ \cot(\alpha \pm \beta) &= \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}\end{aligned}$$

הערה:

בסרטון התיאוריה אין התייחסות מיוחדת לזהויות עבור $\tan(\alpha \pm \beta)$ ו- $\cot(\alpha \pm \beta)$.

שאלות:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בזהויות של סכום והפרש זוויות וללא שימוש במחשבון:

א. $\sin 75^\circ$	ב. $\sin 15^\circ$	ג. $\sin 105^\circ$
ד. $\sin(-15^\circ)$	ה. $\cos 75^\circ$	ו. $\cos 15^\circ$
ז. $\cos(-105^\circ)$	ח. $\cos 165^\circ$	ט. $\cos(-195^\circ)$

2) חשב ללא שימוש במחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

- א. $\sin 65^\circ \cos 25^\circ + \sin 25^\circ \cos 65^\circ$
 ב. $5 \cos 50^\circ \cos 20^\circ + 5 \sin 50^\circ \sin 20^\circ$

(3) הוכח את הזהויות הבאות :

$$\text{א. } \sin(60^\circ + \alpha) + \sin(60^\circ - \alpha) = \sqrt{3} \cos \alpha$$

$$\text{ב. } \cos(45^\circ - \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha) = \sqrt{2} \sin \alpha$$

$$\text{ג. } \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

$$\text{ד. } \tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

(4) נתון: $\cos \beta = \frac{8}{17}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ ו- α, β זוויות חדות.מבלי למצוא את הערכים של α ו- β חשב :

$$\text{א. } \sin(\alpha + \beta)$$

$$\text{ב. } \cos(\alpha + \beta)$$

$$\text{ג. } \tan(\alpha + \beta)$$

(5) הוכח את הזהות: $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \beta \cos \alpha$ (6) הוכח את הזהות: $(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha) = \sin 3\alpha + \cos \alpha$ (7) הוכח את הזהות: $\tan 7\alpha - \tan 5\alpha - \tan 2\alpha = \tan 7\alpha \tan 5\alpha \tan 2\alpha$ (8) הוכח את הזהות: $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$ (9) הוכח את הזהות: $\cot \alpha - \cot \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$

(10) הוכח את הזהות הבאה :

$$\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \sin(\alpha + \beta + \gamma)$$

(11) הוכח כי מתקיים: $\sin 65^\circ \cos 25^\circ + \sin 25^\circ \cos 65^\circ = 1$.

(12) הוכח כי מתקיים: $\tan 18^\circ \tan 27^\circ + \tan 18^\circ + \tan 27^\circ = 1$.

(13) נתון כי: $\sin 76^\circ = m$. הבע את $\sin 31^\circ$ באמצעות m .

(14) הזוויות α ו- β הן זוויות חדות.

נתון כי: $\tan \beta = \frac{(2k-1)\sqrt{3}}{3}$ ו- $\tan \alpha = \frac{(2-k)\sqrt{3}}{3k}$.

הראה כי מתקיים: $\alpha + \beta = 60^\circ$.

(15) היעזר בנוסחה: $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$ ומצא את $\tan x$ ו- $\tan y$.

אם ידוע כי: $\tan(x+y) = -3$ ו- $\tan(x-y) = \frac{1}{3}$. הבחן בין שני מקרים.

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \begin{array}{lllll} \text{א. } \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \text{ב. } \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} & \text{ג. } \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \text{ד. } \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} & \text{ה. } \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \text{ו. } \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \text{ז. } \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} & \text{ח. } -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \text{ט. } -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } 1 & \text{ב. } \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

(3) שאלת הוכחה.

$$(4) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } \frac{84}{85} & \text{ב. } -\frac{13}{85} \\ \text{ג. } -6\frac{6}{13} & \end{array}$$

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

$$(14) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} (m - \sqrt{1-m^2})$$

(15) שאלת הוכחה.

$$(16) \quad 1 \text{ ו- } 2 \text{ או } -\frac{1}{2} \text{ ו- } -1.$$

זווית כפולה:

סיכום כללי:

נפתח זווית כפולה לפי הצורות הבאות:

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2\sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha\end{aligned}$$

שאלות:

(1) הוכח את הזהויות הבאות:

- א. $4\sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha = \sin 4\alpha$
 ב. $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$
 ג. $(\sin 3\alpha - \cos 3\alpha)^2 = 1 - \sin 6\alpha$
 ד. $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$
 ה. $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \cot 2\alpha$
 ו. $\frac{\cos 2\alpha - 2\sin^2 \alpha \cos 2\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{1}{2} \cot 2\alpha$
 ז. $\cos^2 2\alpha = 4\sin^4 \alpha - 4\sin^2 \alpha + 1$
 ח. $\cos 4\alpha = 8\cos^4 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 1$

(2) הוכח את הזהות: $\sin^3 \alpha = \frac{3\sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$ ע"י כתיבה של $\sin 3\alpha$

לפי: $\sin(\alpha + 2\alpha)$ ושימוש בזהויות שנלמדו.

(3) הוכח את הזהות: $\cos^3 \alpha = \frac{3\cos \alpha + \cos 3\alpha}{4}$ ע"י כתיבה של $\cos 3\alpha$

לפי: $\cos(\alpha + 2\alpha)$ ושימוש בזהויות שנלמדו.

(4) נתונה זווית חדה α המקיימת: $\sin \alpha = \frac{40}{41}$. מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א. $\cos \alpha$

ב. $\tan \alpha$

ג. $\sin 2\alpha$

ד. $\cos 2\alpha$

ה. $\tan 2\alpha$

(5) נתונה זווית חדה α המקיימת: $\tan \alpha = \frac{5}{12}$. מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א. $\sin \alpha$.

ב. $\cos \alpha$.

ג. $\sin 2\alpha$.

ד. $\cos 2\alpha$.

(6) נתונה זווית α ברביע הראשון וזווית β ברביע השני המקיימות: $\sin \alpha = \frac{5}{13}$

ו- $\cos \beta = -0.8$. מבלי למצוא את α ו- β חשב את הביטויים הבאים:

א. $\sin(\alpha + \beta)$.

ב. $\cos(\alpha + \beta)$.

ג. $\sin(2\alpha + \beta)$.

(7) נתון כי $\sin \alpha + \cos \alpha = 1.2$ עבור $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. חשב את $\sin 2\alpha$.

(8) פשט את הביטוי הבא: $\sqrt{\frac{1 + \cos 8\alpha}{2}}$.

(9) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sin 16^\circ \cos 16^\circ}{3 - 6 \sin^2 29^\circ}$.

(10) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא: $\frac{\sin^2 78^\circ - \cos^2 78^\circ}{\sin 66^\circ}$.

(11) ללא שימוש במחשבון, חשב את ערך הביטוי הבא: $\frac{5 \tan 15^\circ (1 - 2 \cos^2 15^\circ)}{1 - \tan^2 15^\circ}$.

תשובות סופיות:

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

$$(4) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } \frac{9}{41} & \text{ב. } 4\frac{4}{9} \\ \text{ג. } \frac{720}{1681} & \text{ד. } -\frac{1519}{1681} \end{array}$$

$$\text{ה. } -\frac{720}{1519}$$

$$(5) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } \frac{5}{13} & \text{ב. } \frac{12}{13} \\ \text{ג. } \frac{120}{169} & \text{ד. } \frac{119}{169} \end{array}$$

$$(6) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } \frac{16}{65} & \text{ב. } -\frac{63}{65} \\ \text{ג. } -\frac{123}{845} & \end{array}$$

(7) 0.44

(8) $\cos 4\alpha$

$$(9) \quad \frac{1}{6}$$

(10) 1

(11) -1.25

סכום והפרש פונקציות טריגונומטריות:

סיכום כללי:

להלן נוסחאות הסכום וההפרש של פונקציות טריגונומטריות:

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}\end{aligned}$$

הערה:

בסרטון התיאוריה אין התייחסות לזהויות הסכום וההפרש של טנגנס ושל קוטנגנס עקב חוסר השימוש בהן בפתרון שאלות.

שאלות:

- (1) הוכח את הזהות הבאה : $\sin 5\alpha + \sin 3\alpha = 2 \sin 4\alpha \cos \alpha$
- (2) הוכח את הזהות הבאה : $\sin 7\alpha - \sin 2\alpha = 2 \sin 2.5\alpha \cos 4.5\alpha$
- (3) הוכח את הזהות הבאה : $\cos \alpha + \cos 5\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos 3\alpha$
- (4) הוכח את הזהות הבאה : $\cos 5\alpha - \cos 2\alpha = -2 \sin 3.5\alpha \cos 1.5\alpha$
- (5) הוכח את הזהות הבאה : $\sin 3\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos \alpha - \sin \alpha$
- (6) הוכח את הזהות הבאה : $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$
- (7) הוכח את הזהות הבאה : $\sin(2\alpha + \beta) - 2 \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha = \sin \beta$
- (8) הוכח את הזהות הבאה : $\frac{\sin 5\alpha - \sin \alpha}{\sin 4\alpha - \sin 2\alpha} = 2 \cos \alpha$

$$(9) \quad \frac{\sin 7\alpha - \sin 3\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 6\alpha} = 2 \sin \alpha : \text{הוכח את הזהות הבאה :}$$

$$(10) \quad \frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \tan 2\alpha : \text{הוכח את הזהות הבאה :}$$

$$(11) \quad \tan \alpha + \tan 3\alpha = \frac{2 \sin 4\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha} : \text{הוכח את הזהות הבאה :}$$

$$(12) \quad \text{פשוט את הביטוי : } \frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1} \text{ ומצא את ערכו מבלי להיעזר}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{5}{6} \text{ במחשבון אם ידוע כי}$$

$$(13) \quad \text{נתון כי } \alpha \text{ ו- } \beta \text{ הן זוויות חדות המקיימות : } \sin \alpha = \frac{2mn}{m^2 + n^2} \text{ ו- } \sin \beta = \frac{n^2 - m^2}{m^2 + n^2}$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ : \text{הראה כי}$$

$$(14) \quad \text{היעזר במעבר מכפל לסכום או הפרש}$$

$$\text{והוכח כי : } \cos 6\alpha \cos 2\alpha - \cos 5\alpha \cos \alpha = -\sin 7\alpha \sin \alpha$$

$$(15) \quad \text{היעזר במעבר מכפל לסכום או הפרש}$$

$$\text{והוכח כי : } \sin 4\alpha \sin 2\alpha - \sin 5\alpha \sin \alpha + \cos 3\alpha \cos \alpha = \cos 2\alpha$$

$$(16) \quad \text{חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא : } \sin 52.5^\circ \cdot \sin 7.5^\circ$$

$$(17) \quad \text{חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא : } \frac{\sin 35^\circ \sin 55^\circ}{\cos 40^\circ \cos 20^\circ - 0.25}$$

$$(18) \quad \text{חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא : } \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$$

$$(19) \quad \text{חשב ללא מחשבון את ערך הביטוי הבא : } \sin 5^\circ \cdot \sin 25^\circ \cdot \sin 35^\circ \cdot \sin 55^\circ \cdot \sin 65^\circ \cdot \sin 85^\circ$$

תשובות סופיות:

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

(4) שאלת הוכחה.

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12) $-\frac{7}{9}$.

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

(16) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$.

(17) 1.

(18) $\frac{1}{8}$.(19) $\frac{1}{64}$.

מכפלת פונקציות:

סיכום כללי:

להלן נוסחאות המעבר מסכום למכפלה וממכפלה לסכום:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \end{array} \right.$$

שאלות:

$$(1) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה: } \sin 7\alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} (\sin 8\alpha + \sin 6\alpha)$$

$$(2) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה: } \cos 11\alpha \sin 3\alpha = \frac{1}{2} (\sin 14\alpha - \sin 8\alpha)$$

$$(3) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה: } \cos 4\alpha \cos 10\alpha = \frac{1}{2} (\cos 6\alpha + \cos 14\alpha)$$

$$(4) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה: } \sin 3\alpha \sin 7\alpha = \frac{1}{2} (\cos 4\alpha - \cos 10\alpha)$$

$$(5) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה: } 2 \sin 7\alpha \sin 2\alpha + \cos 9\alpha = \cos 5\alpha$$

$$(6) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה: } \sin 7\alpha \cos 4\alpha - \sin 4\alpha \cos \alpha = \sin 3\alpha \cos 8\alpha$$

$$(7) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה: } \sin \alpha \sin 3\alpha = \cos 2\alpha - \cos 3\alpha \cos \alpha$$

$$(8) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה: } 2(\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha) = \cos 2\alpha - \cos 2\beta$$

$$(9) \quad \text{הוכח את הזהות הבאה: } \frac{2}{\cot \beta - \tan \alpha} = \tan(\alpha + \beta) - \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$$

תשובות סופיות:

- (1) הוכחה.
- (2) הוכחה.
- (3) הוכחה.
- (4) הוכחה.
- (5) הוכחה.
- (6) הוכחה.
- (7) הוכחה.
- (8) הוכחה.
- (9) הוכחה.

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי א

פרק 9 - משוואות טריגונומטריות

תוכן העניינים

147	1. משוואות טריגונומטריות כלליות
150	2. משוואות הנפתרות עי טכניקה אלגברית
152	3. משוואות הנפתרות על ידי זהויות יסוד
154	4. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של מעגל היחידה
155	5. משוואות הנפתרות על ידי חלוקה בקוסינוס
156	6. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של סכום והפרש זוויות
157	7. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של זווית כפולה
158	8. משוואות מהצורה $a \sin(x) + b \cos(x) = c$
159	9. משוואות הנפתרות על ידי זהויות של סכום והפרש פונקציות
161	10. משוואות עם תחום נתון
162	11. משוואות עם זוויות ברדיאנים
166	12. אי שוויונים טריגונומטריים

משוואות טריגונומטריות כלליות:

סיכום כללי:

פתרון כללי של משוואות טריגונומטריות (במעלות):

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריגונומטריות היסודיות
כאשר x הוא משתנה ו- α היא זווית נתונה/ידועה:

המשוואה	הפתרון
$\sin x = \sin \alpha$	$x_1 = \alpha + 360^\circ k$, $x_2 = 180^\circ - \alpha + 360^\circ k$
$\cos x = \cos \alpha$	$x_{1,2} = \pm \alpha + 360^\circ k$
$\tan x = \tan \alpha$	$x = \alpha + 180^\circ k$
$\cot x = \cot \alpha$	$x = \alpha + 180^\circ k$

כאשר k מספר שלם.

שאלות:

(1) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הסינוס):

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \text{א.} \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ב.} \quad \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ג.} \quad \sin x = -\frac{1}{2} \quad \text{ד.}$$

(2) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הקוסינוס):

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \text{א.} \quad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ב.}$$

(3) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציית הטנגנס):

$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{א.} \quad \tan x = -1 \quad \text{ב.}$$

(4) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (זווית כללית) :

א. $\sin x = 0.7$ ב. $\cos x = -0.6$ ג. $\tan x = 5$

(5) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות לא מסודרות) :

א. $\sin 3x = \frac{1}{2}$ ב. $2 \cos 2x = -\sqrt{3}$

ג. $\tan 5x = -1$ ד. $3 \sin 2x = 2$

ה. $3 \cos 3x = 1$ ו. $2 \tan 4x = 1$

(6) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (ארגומנט מורכב) :

א. $\sin(2x + 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ב. $\cos(75^\circ - 3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ג. $\tan(50^\circ - x) = 1.3$

(7) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (פונקציות עם ארגומנטים שונים) :

א. $\sin x = \sin 3x$ ב. $\sin 2x = \sin(x + 30^\circ)$

ג. $\sin x = \sin(120^\circ - x)$ ד. $\cos x = \cos 3x$

ה. $\cos x = \cos(40^\circ - x)$ ו. $\tan x = \tan 3x$

ז. $\tan 2x = \tan(60^\circ - x)$

(8) כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (משוואות מיוחדות) :

א. $\sin x = 0$ ב. $\sin x = 1$

ג. $\sin x = -1$ ד. $\cos x = 0$

ה. $\cos x = 1$ ו. $\cos x = -1$

ז. $\tan x = 0$ ח. $\tan x = 1$

תשובות סופיות:

- (1) א. $x_1 = 30^\circ + 360^\circ k$, $x_2 = 150^\circ + 360^\circ k$ ב. $x_1 = 45^\circ + 360^\circ k$, $x_2 = 135^\circ + 360^\circ k$
 ג. $x_1 = -60^\circ + 360^\circ k$, $x_2 = 240^\circ + 360^\circ k$ ד. $x_1 = -30^\circ + 360^\circ k$, $x_2 = 210^\circ + 360^\circ k$
- (2) א. $x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k$ ב. $x_{1,2} = \pm 150^\circ + 360^\circ k$
- (3) א. $x = 30^\circ + 180^\circ k$ ב. $x = 135^\circ + 180^\circ k$
- (4) א. $x_1 = 44.427^\circ + 360^\circ k$, $x_2 = 135.573^\circ + 360^\circ k$ ב. $x_{1,2} = 126.87^\circ + 360^\circ k$ ג. $x = 78.69^\circ + 180^\circ k$
- (5) א. $x_1 = 10^\circ + 120^\circ k$, $x_2 = 50^\circ + 120^\circ k$ ב. $x_1 = 75^\circ + 180^\circ k$, $x_2 = -75^\circ + 180^\circ k$
 ג. $x = -9^\circ + 36^\circ k$ ד. $x_1 = 20.9^\circ + 180^\circ k$, $x_2 = 69.09^\circ + 180^\circ k$
 ה. $x_{1,2} = \pm 23.5^\circ + 120^\circ k$ ו. $x = 6.64^\circ + 45^\circ k$
- (6) א. $x_1 = 105^\circ + 180^\circ k$, $x_2 = -45^\circ + 180^\circ k$ ב. $x_1 = 10^\circ + 120^\circ k$, $x_2 = 40^\circ + 120^\circ k$ ג. $x = -2.431^\circ + 180^\circ k$
- (7) א. $x_1 = 180^\circ k$, $x_2 = 45^\circ + 90^\circ k$ ב. $x_1 = 30^\circ + 360^\circ k$, $x_2 = 50^\circ + 120^\circ k$ ג. $x = 60^\circ + 180^\circ k$ ד. $x = 90^\circ k$
 ה. $x = 20^\circ + 180^\circ k$ ו. $x = 180^\circ k$ ז. $x = 20^\circ + 60^\circ k$ ח. $x = 180^\circ + 360^\circ k$ ט. $x = 90^\circ + 360^\circ k$ י. $x = 180^\circ k$
 יא. $x = 90^\circ + 180^\circ k$ יב. $x = 360^\circ k$ יג. $x = 180^\circ + 360^\circ k$ יד. $x = 45^\circ + 180^\circ k$ טו. $x = 180^\circ k$

משוואות הנפתרות ע"י טכניקה אלגברית:

סיכום כללי:

נעזר בטכניקה אלגברית בכדי להביא משוואה מורכבת לצורה של משוואה יסודית.

טכניקות שכיחות:

- הוצאת שורש ריבועי.
- פירוק לגורמים (ע"י הוצאת גורם משותף, ע"י נוסחאות הכפל המקוצר וע"י פירוק טרינום).
- פתרון משוואה ריבועית.

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות (טכניקה אלגברית):

$$\sin^2 x = \frac{1}{4} \quad (2) \qquad \cos^2 x = \frac{3}{4} \quad (1)$$

$$\sin x \cos 3x = 0 \quad (4) \qquad \tan^2 2x = 3 \quad (3)$$

$$2 \cos^2 x + \sqrt{3} \cos x = 0 \quad (6) \qquad \sin 2x - 2 \sin^2 2x = 0 \quad (5)$$

$$3 \sin^2 x - \sin x = 2 \quad (8) \qquad 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \quad (7)$$

$$\cos^2 x + 2 \cos x = 3 \quad (10) \qquad 6 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \quad (9)$$

$$\tan^2 x = 4 \tan x - 1 \quad (12) \qquad \tan^2 x - 3 \tan x - 4 = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\sin x}{\cos x - 1} = 0 \quad (14) \qquad \cos x - \frac{2}{\cos x} + 1 = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\cos 2x}{\tan x + 1} = 0 \quad (15)$$

תשובות סופיות:

$$. x_{1,2} = \pm 30^\circ + 360^\circ k, x_{3,4} = \pm 150^\circ + 360^\circ k \quad (1)$$

$$. x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k, x_3 = 330^\circ + 360^\circ k, x_4 = 210^\circ + 360^\circ k \quad (2)$$

$$. x_1 = 30^\circ + 90^\circ k, x_2 = -30^\circ + 90^\circ k \quad (3)$$

$$. x_1 = 180^\circ k, x_2 = 30^\circ + 60^\circ k \quad (4)$$

$$. x_1 = 90^\circ k, x_2 = 15^\circ + 180^\circ k, x_3 = 75^\circ + 180^\circ k \quad (5)$$

$$. x_1 = 90^\circ + 180^\circ k, x_{2,3} = \pm 150^\circ + 360^\circ k \quad (6)$$

$$. x_1 = 90^\circ + 360^\circ k, x_2 = 210^\circ + 360^\circ k, x_3 = -30^\circ + 360^\circ k \quad (7)$$

$$. x_1 = 90^\circ + 360^\circ k, x_2 = -41.8^\circ + 360^\circ k, x_3 = 221.8^\circ + 360^\circ k \quad (8)$$

$$. x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k, x_3 = -19.4^\circ + 360^\circ k, x_4 = 199.4^\circ + 360^\circ k \quad (9)$$

$$. x = 360^\circ k \quad (10)$$

$$. x_1 = -45^\circ + 180^\circ k, x_2 = 75.964^\circ + 180^\circ k \quad (11)$$

$$. x_1 = 75^\circ + 180^\circ k, x_2 = 15^\circ + 180^\circ k \quad (12)$$

$$. x = 360^\circ k \quad (13)$$

$$. x = 180^\circ + 360^\circ k \quad (14)$$

$$. x = 45^\circ + 90^\circ k, x \neq -45^\circ + 180^\circ k \quad (15)$$

משוואות הנפתרות ע"י זהויות יסוד:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות היסוד הטריגונומטריות:

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$	$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$	קשרים בין פונקציות
$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ $\tan \alpha = \cot(90^\circ - \alpha)$	$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$ $\cot \alpha = \tan(90^\circ - \alpha)$	זוויות משלימות ל- 90°
$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$	$\cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$	
		קשרים בין פונקציות

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$\sin x = \cos(x + 45^\circ) \quad (2)$$

$$\sin x = \cos x \quad (1)$$

$$2 \cos^2 x = 3 \sin x \quad (4)$$

$$\cos x = \frac{2}{3} \sin^2 x \quad (3)$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \sin x \quad (6)$$

$$\sin^2 x - \cos x = \frac{1}{4} \quad (5)$$

$$\sin x - \tan x = 0 \quad (8)$$

$$\sin^2 x + 2 \cos^2 x = 1.5 \quad (7)$$

תשובות סופיות:

$$\cdot x = 45^\circ + 180^\circ k \quad (1)$$

$$\cdot x = 22.5^\circ + 180^\circ k \quad (2)$$

$$\cdot x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k \quad (3)$$

$$\cdot x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k \quad (4)$$

$$\cdot x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k \quad (5)$$

$$x_1 = 30^\circ + 120^\circ k, x_2 = -90^\circ + 360^\circ k \quad (6)$$

$$\cdot x_{1,2} = \pm 45^\circ + 360^\circ k, x_{3,4} = \pm 135^\circ + 360^\circ k \quad (7)$$

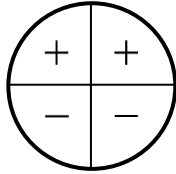
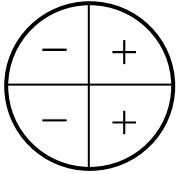
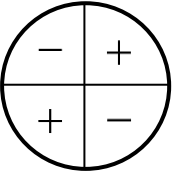
$$\cdot x = 180^\circ k \quad (8)$$

משוואות הנפתרות ע"י זהויות של מעגל היחידה:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות של מעגל היחידה:

רביע	סינוס	קוסינוס	טנגנס
I II III	$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$ $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$ $\tan(180^\circ + \alpha) = \tan \alpha$ $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$
סימנים			

זהויות עבור זוויות הגדולות מ-360 מעלות:

$$\boxed{\begin{matrix} \sin(\alpha + 360^\circ k) = \sin \alpha \\ \cos(\alpha + 360^\circ k) = \cos \alpha \end{matrix}}, \quad \boxed{\begin{matrix} \tan(\alpha + 180^\circ k) = \tan \alpha \\ \cot(\alpha + 180^\circ k) = \cot \alpha \end{matrix}}$$

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \cos 2x = -\cos 3x & (2) \\ \sin 3x = -\cos(180^\circ - x) & (4) \end{array} \quad \begin{array}{ll} \sin x = -\sin 3x & (1) \\ \sin(x + 30^\circ) = -\cos x & (3) \end{array}$$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 180^\circ + 360^\circ k, x_2 = 36^\circ + 72^\circ k & (2) \\ x_1 = 22.5^\circ + 90^\circ k, x_2 = 45^\circ + 180^\circ k & (4) \end{array} \quad \begin{array}{ll} x_1 = 90^\circ k, x_2 = -90^\circ + 180^\circ k & (1) \\ x = 120^\circ + 180^\circ k & (3) \end{array}$$

משוואות הנפתרות על ידי חלוקה בקוסינוס:

סיכום כללי:

טכניקה יעילה כדי להעביר משוואה מהצורה: $\sin x = a \cos x$ לפונקציה טריגונומטרית אחת היא ע"י חלוקה ב- $\cos x$ (בתנאי ש- $\cos x \neq 0$). כך מתקבלת המשוואה:

$$\sin x = a \cos x \quad / : \cos x \neq 0$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = a \frac{\cos x}{\cos x}$$

$$\tan x = a$$

$$x = \tan^{-1}(a) + 180^\circ k$$

הערה:

יש לבדוק האם ערכי x שמקיימים $\cos x = 0$ מהווים פתרון למשוואה. אם כן אז יש להוסיף אותם לפתרון הסופי.

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$3 \sin x = \cos x \quad (2)$$

$$\sin x = 2 \cos x \quad (1)$$

$$2 \sin x = -5 \cos x \quad (4)$$

$$4 \sin x = 7 \cos x \quad (3)$$

$$3 \sin^2 x = \cos^2 x \quad (6)$$

$$\sin^2 x = 8 \cos^2 x \quad (5)$$

תשובות סופיות:

$$. x = 63.43^\circ + 180^\circ k \quad (1)$$

$$. x = 18.43^\circ + 180^\circ k \quad (2)$$

$$. x = 60.25^\circ + 180^\circ k \quad (3)$$

$$. x = -68.19^\circ + 180^\circ k \quad (4)$$

$$. x_1 = 70.52^\circ + 180^\circ k, x_2 = -70.52^\circ + 180^\circ k \quad (5)$$

$$. x_1 = 30^\circ + 180^\circ k, x_2 = -30^\circ + 180^\circ k \quad (6)$$

משוואות הנפתרות על ידי זהויות של סכום והפרש זוויות:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות של סכום והפרש זוויות:

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$	סכום והפרש עבור סינוס וקוסינוס
$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$ $\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}$	סכום והפרש עבור טנגנס וקוטנגנס

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$\sin(x + 45^\circ) \sin(x - 45^\circ) = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 \sin x = \sin(60^\circ - x) \quad (1)$$

$$3 \cos^2 x - \sin^2 x = \sin 3x \quad (4)$$

$$\frac{\cos 3x}{\sin x} - \frac{\sin 3x}{\cos x} = 2 \quad (3)$$

תשובות סופיות:

$$x = 19.11^\circ + 180^\circ k \quad (1)$$

$$x = 90^\circ + 180^\circ k \quad (2)$$

$$x = 15^\circ + 60^\circ k \quad (3)$$

$$x_{1,2} = \pm 60^\circ + 180^\circ k, x_3 = 90^\circ + 360^\circ k \quad (4)$$

משוואות הנפתרות ע"י זהויות של זווית כפולה:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות של זווית כפולה:

$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$	סינוס זווית כפולה
$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$	קוסינוס זווית כפולה

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

- | | |
|-------------------------------------|------------------------------|
| $\sqrt{2} \sin x + \sin 2x = 0$ (2) | $\sin x - \sin 2x = 0$ (1) |
| $2 \cos 2x + \sin 4x = 0$ (4) | $4 \cos x = \sin 2x$ (3) |
| $\cos 2x = 2 \sin x$ (6) | $3 \cos x - \cos 2x = 0$ (5) |
| $2 \sin^2 x = \cos 2x + 2$ (8) | $\sin x + \cos 2x = 1$ (7) |

תשובות סופיות:

- | | |
|---|---|
| $x_1 = 180^\circ k, x_{2,3} = \pm 135^\circ + 360^\circ k$ (2) | $x_1 = 360^\circ k, x_2 = 60^\circ + 120^\circ k$ (1) |
| $x_1 = 45^\circ + 90^\circ k, x_2 = 135^\circ + 180^\circ k$ (4) | $x = 90^\circ + 180^\circ k$ (3) |
| $x_1 = 21.1^\circ + 360^\circ k, x_2 = 158.9^\circ + 360^\circ k$ (6) | $x_{1,2} = \pm 106.307^\circ + 360^\circ k$ (5) |
| $x_1 = 180^\circ k, x_2 = 30^\circ + 360^\circ k, x_3 = 150^\circ + 360^\circ k$ (7) | |
| $x_1 = -60^\circ + 360^\circ k, x_2 = 60^\circ + 360^\circ k, x_3 = 120^\circ + 360^\circ k, x_4 = 240^\circ + 360^\circ k$ (8) | |

משוואות מהצורה: $a \sin(x) + b \cos(x) = c$

סיכום כללי:

ניתן להביא משוואה מהצורה: $a \sin x + b \cos x = c$ לצורה: $\sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a}$.

מציאת זווית α המקיימת: $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ תאפשר לכתוב: $\sin x + \tan \alpha \cdot \cos x = \frac{c}{a}$.

שימוש בזהות: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ובזהות: $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$ יובילו:

$$\sin x + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos x = \frac{c}{a} \quad / \cdot \cos \alpha$$

$$\sin x \cos \alpha + \sin \alpha \cos x = \frac{c}{a} \cos \alpha$$

$$\sin(x + \alpha) = \frac{c}{a} \cos \alpha$$

אם נסמן: $\frac{c}{a} \cos \alpha = k$ נקבל את המשוואה: $\sin(x + \alpha) = k$ כאשר α ו- k ידועים. מכאן הפתרון הוא ישיר לפי משוואת סינוס.

שאלות:

פתור את המשוואות הבאות:

$$5 \cos x - 6 \sin x = 1 \quad (2)$$

$$10 \sin x + 3 \cos x = 5 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \sin x + \sqrt{3} \cos^2 \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2} \quad (4)$$

$$\sqrt{3} \sin 2x + 3 \cos 2x = \sqrt{12} \quad (3)$$

$$\cos x + \cos(60^\circ + x) = \sqrt{2} + \cos(60^\circ - x) \quad (5)$$

תשובות סופיות:

$$x_1 = 11.91^\circ + 360^\circ k, x_2 = 134.69^\circ + 360^\circ k \quad (1)$$

$$x = 15^\circ + 180^\circ k \quad (3) \quad x_1 = 227.156^\circ + 360^\circ k, x_2 = 32.44^\circ + 360^\circ k \quad (2)$$

$$x_1 = -60^\circ + 720^\circ k, x_2 = 180^\circ + 360^\circ k \quad (4)$$

$$x_1 = -105^\circ + 360^\circ k, x_2 = 15^\circ + 360^\circ k \quad (5)$$

משוואות הנפתרות ע"י זהויות של סכום והפרש פונקציות:

סיכום כללי:

כאשר משוואה מכילה יותר מפונקציה טריגונומטרית אחת, יש תחילה להעביר אותה למשוואה שקולה המכילה פונקציה טריגונומטרית אחת. לאחר מכן ניתן לבצע פעולות אלגבריות בכדי לקבל משוואות יסודיות ולכתוב את הפתרון עבור כל אחת. לשם כך נעזר בזהויות טריגונומטריות.

תזכורת – זהויות של סכום והפרש פונקציות:

$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$	סכום והפרש פונקציות עבור סינוס
$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$	סכום והפרש פונקציות עבור קוסינוס

שאלות:

כתוב את הפתרון הכללי של המשוואות הבאות:

$$\sin x + \sin 3x = \sin 2x \quad (1)$$

$$\cos 2x - \cos 6x = \sin 2x \quad (2)$$

$$\sin x + \sin 3x = 4 \sin^3 x \quad (3)$$

$$\sin 6x - \sin 4x = 1 - \cos 2x \quad (4)$$

$$(\sin 5x + \sin 7x)^2 = (\cos 5x + \cos 7x)^2 \quad (5)$$

$$2 \cos^2 \frac{x}{2} + \cos 3x + \cos 5x = 1 \quad (6)$$

$$1 + \sin x + \sin 7x = \cos 8x \quad (7)$$

$$2 \sin 3x (\cos 2x + \cos x) = \sin x + \sin 2x \quad (8)$$

$$\sin(x + 60^\circ) - \sin x = \sin(2x + 60^\circ) - \sin 2x \quad (9)$$

$$\cos^2 3x - \cos^2 x = \sin x \cos x \quad (10)$$

$$\sin 8x \sin 2x + \cos 10x = 0 \quad (11)$$

$$\cos x + 3 \sin x = 1 + 2 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} \quad (12)$$

$$4 \sin 2x \sin 5x \sin 7x - \sin 4x = 0 \quad (13)$$

$$4 \cos x \cos 2x \cos 3x = 1 \quad (14)$$

תשובות סופיות:

$$x_{1,2} = \pm 60^\circ + 360^\circ k, x_3 = 90^\circ k \quad (1)$$

$$x_1 = 45^\circ + 90^\circ k, x_2 = 180^\circ k \quad (2)$$

$$x_1 = 37.5^\circ + 90^\circ k, x_2 = 7.5^\circ + 90^\circ k, x_3 = 90^\circ k \quad (3)$$

$$x_1 = 15^\circ + 60^\circ k, x_2 = 180^\circ k, x_3 = -22.5^\circ + 90^\circ k \quad (4)$$

$$x_1 = 36^\circ k, x_2 = \left(\frac{180}{7}\right)^\circ + \left(\frac{180}{7}\right)^\circ k \quad (5)$$

$$x_{1,2} = \pm 30^\circ + 90^\circ k, x_3 = 90^\circ + 180^\circ k \quad (6)$$

$$x_1 = -\left(12\frac{6}{7}\right)^\circ k + \left(51\frac{3}{7}\right)^\circ k, x_2 = 45^\circ k \quad (7)$$

$$x_1 = 40^\circ k, x_2 = 180^\circ + 360^\circ k \quad (8)$$

$$x_1 = -20^\circ + 120^\circ k, x_2 = 360^\circ k \quad (9)$$

$$x_1 = 52.5^\circ + 90^\circ k, x_2 = -7.5^\circ + 90^\circ k, x_3 = 90^\circ k \quad (10)$$

$$x_1 = 45^\circ + 90^\circ k, x_2 = 11.25^\circ + 22.5^\circ k \quad (11)$$

$$x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, x_2 = 150^\circ + 360^\circ k \quad (12)$$

$$x_1 = 7.5^\circ + 15^\circ k, x_2 = 90^\circ k \quad (13)$$

$$x_1 = 60^\circ + 180^\circ k, x_2 = 22.5^\circ + 45^\circ k \quad (14)$$

משוואות עם תחום נתון:

סיכום כללי:

כדי למצוא את הפתרונות של משוואה טריגונומטרית בתחום נתון, נמצא תחילה את הפתרון הכללי שלה ולאחר מכן נציב ערכים ב- k ונבחר את הערכים שנמצאים בתחום הנתון.

שאלות:

מצא את כל הפתרונות של המשוואות הבאות בתחום הנתון לידן:

- (1) $[0^\circ:180^\circ]$, $8\sin x - 4 = 0$
- (2) $[-90^\circ:90^\circ]$, $\sin 2x = \sin(x + 60^\circ)$
- (3) $[-90^\circ:90^\circ]$, $3\cos(2x + 30^\circ) + 1 = 0$
- (4) $[0^\circ:360^\circ]$, $\cos(50^\circ - x) = -\cos x$
- (5) $[-30^\circ:30^\circ]$, $2\sin 3x - 5\cos 3x = 0$
- (6) $[0^\circ:180^\circ]$, $2\cos^2 3x = \sin 6x + 1$
- (7) $[-180^\circ:180^\circ]$, $\cos 4x + 1 = 3\sin 2x$
- (8) $[-180^\circ:180^\circ]$, $\cos 2x + \cos^2 x + \sin x = 0$

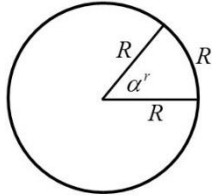
תשובות סופיות:

- (1) $x = 30^\circ, 150^\circ$
- (2) $x = -80^\circ, 40^\circ, 60^\circ$
- (3) $x = 39.736^\circ, -69.736^\circ$
- (4) $x = 115^\circ, 295^\circ$
- (5) $x = 22.733^\circ$
- (6) $x = 7.5^\circ, 37.5^\circ, 67.5^\circ, 97.5^\circ, 127.5^\circ, 157.5^\circ$
- (7) $x = -165^\circ, -105^\circ, 15^\circ, 75^\circ$
- (8) $x = -138.19^\circ, -41.81^\circ, 90^\circ$

משוואות עם זוויות ברדיאנים:

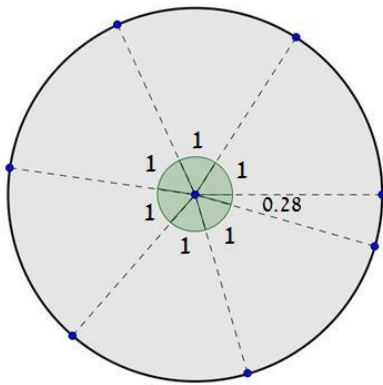
סיכום כללי:

הגדרת הרדיאן:



זווית של רדיאן אחד מוגדרת להיות הזווית המרכזית המתאימה לקשת שאורכה שווה לרדיוס המעגל.

עבור מעגל שרדיוסו R , תימצאנה 2π רדיאנים על היקפו, שכן היקף מעגל הוא $P = 2\pi \cdot R$.



באיור שלפניך ניתן לראות חלוקה של מעגל ל- $2\pi = 6.28$ קשתות אשר שוות לרדיוס המעגל. הזווית של כל קשת כזאת שווה לרדיאן אחד, כאשר הזווית האחרונה שווה ל-0.28 מרדיאן. מקבלים 2π רדיאנים.

קשר בין רדיאנים למעלות:

- נוסחת מעבר מזווית α° (במעלות) לזווית α^r (ברדיאנים): $\alpha^r = \frac{\pi}{180} \alpha^\circ$
- נוסחת מעבר מזווית α^r (ברדיאנים) לזווית α° (במעלות): $\alpha^\circ = \frac{180}{\pi} \alpha^r$

פתרונות משוואות טריגונומטריות ברדיאנים:

להלן נוסחאות הפתרון של המשוואות הטריונומטריות היסודיות כאשר x הוא משתנה ו- α היא זווית ידועה הנתונה ברדיאנים:

המשוואה	הפתרון
$\sin x = \sin \alpha$	$x_1 = \alpha + 2\pi k$, $x_2 = \pi - \alpha + 2\pi k$
$\cos x = \cos \alpha$	$x_{1,2} = \pm \alpha + 2\pi k$
$\tan x = \tan \alpha$	$x = \alpha + \pi k$
$\cot x = \cot \alpha$	$x = \alpha + \pi k$

כאשר k מספר שלם.

שאלות:

(1) המר את הזוויות הבאות ממעלות לרדיאנים:

א. 30°	ב. 90°	ג. 75°	ד. 120°
ה. 210°	ו. 315°	ז. 18°	ח. 285°
ט. -15°	י. -80°	יא. 510°	יב. -390°

(2) המר את הזוויות הבאות מרדיאנים למעלות:

א. π	ב. 2π	ג. 4π	ד. 1.5π
ה. $\frac{1}{2}\pi$	ו. $\frac{\pi}{4}$	ז. $\frac{\pi}{6}$	ח. $\frac{1}{18}\pi$
ט. $\frac{13}{18}\pi$	י. $\frac{19}{12}\pi$	יא. $1\frac{1}{6}\pi$	יב. $2\frac{1}{4}\pi$

(3) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (משוואות יסודיות שונות):

א. $2\sin 3x = 1$, $\left[0; \frac{1}{3}\pi\right]$	ב. $\sqrt{3} + 2\cos x = 0$, $[0; \pi]$
ג. $3 - 3\tan \frac{x}{2} = 0$, $[0; 2\pi]$	ד. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $[0; \pi]$
ה. $4\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2 = 0$, $\left[0; \frac{1}{2}\pi\right]$	ו. $\sin x = \sin\left(\frac{2}{3}\pi - 2x\right)$, $\left[-\frac{5\pi}{18}; \frac{5\pi}{18}\right]$
ז. $5 - 5\tan(4x - 0.1\pi) = 0$, $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$	ח. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 0.7$, $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$

(4) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (טכניקה אלגברית):

א. $\sin^2 x = \frac{3}{4}$, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$	ב. $16\cos^2 2x - 1 = 0$, $\left[-\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8}\right]$
ג. $2\tan^2 x - 18 = 0$, $[0; \pi]$	ד. $3\sin x \cos x + 3\cos x = 0$, $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$
ה. $\sin^2 x - 5\sin x \cos x = 0$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	ו. $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$, $[-\pi; \pi]$
ז. $4\cos^2 x - \sqrt{2}\cos x - 1 = 0$, $[-\pi; 0]$	ח. $\tan^2 x - 7\tan x + 10 = 0$, $[0; 2\pi]$

(5) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות יסוד):

א. $0 \leq x \leq \pi, \sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

ב. $0 \leq x \leq \pi, \tan x = 4 \sin x$

ג. $0 \leq x \leq 2\pi, 2 \sin^2 x = 3 \cos x$

(6) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (שימוש בזהויות ממעגל היחידה):

א. $[-\pi : \pi], \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin x$

ב. $[0 : \pi], \sin\left(2x + \frac{2}{9}\pi\right) = -\cos 2x$

ג. $[0 : \pi], \sin 4x = -\cos(\pi - x)$

ד. $\left[-\frac{\pi}{2} : \frac{\pi}{2}\right], \tan x = -\tan 2x$

(7) פתור את המשוואות הבאות בתחום שלידן (זהויות של זווית כפולה):

א. $-\pi \leq x \leq \pi, \sin 2x + \cos^2 x = 0$

ב. $[-\pi : \pi], \cos 4x + 1 = 3 \sin 2x$

ג. $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 2 \sin^2 x = \cos 2x + 2$

ד. $0 \leq x \leq \pi, \cos 4x + \sin^2 x = 1$

תשובות סופיות:

- (1) א. $\frac{\pi}{6}$ ב. $\frac{\pi}{2}$ ג. $\frac{5\pi}{12}$ ד. $\frac{2\pi}{3}$ ה. $\frac{7\pi}{6}$
ו. $\frac{7\pi}{4}$ ז. $\frac{\pi}{10}$ ח. $\frac{19\pi}{12}$ ט. $-\frac{\pi}{12}$ י. $-\frac{4\pi}{9}$
יא. $\frac{17\pi}{6}$ יב. $-\frac{13\pi}{6}$
- (2) א. 180° ב. 360° ג. 720° ד. 270° ה. 90°
ו. 45° ז. 30° ח. 10° ט. 130° י. 285°
יא. 210° יב. 405°
- (3) א. $x = \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}$ ב. $x = \frac{5\pi}{6}$ ג. $x = \frac{\pi}{2}$ ד. $x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$
ה. $x = 0$ ו. $x = \frac{2\pi}{9}$ ז. $x = 0.0875\pi$ ח. $x = 0.224\pi$
- (4) א. $x = \frac{\pi}{3}$ ב. ϕ ג. $x = 0.398\pi, 0.602\pi$ ד. ϕ
ה. $x = 0, 0.437\pi$ ו. $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$
ז. $x = -\frac{\pi}{4}, -0.615\pi$ ח. $x = 0.352\pi, 0.437\pi, 1.352\pi, 1.437\pi$
- (5) א. $x = \frac{\pi}{8}$ ב. $x = 0, 0.42\pi, \pi$ ג. $x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$
- (6) א. $x = \frac{\pi}{12}, -\frac{11\pi}{12}$ ב. $x = \frac{23\pi}{72}, \frac{59\pi}{72}$
- (7) א. $x = \pm \frac{\pi}{2}, -0.148\pi, 0.852\pi$ ב. $x = -\frac{7\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}$
ג. $x = \pm \frac{\pi}{3}$ ד. $x = 0, 0.38\pi, 0.61\pi, \pi$

אי שוויונים טריגונומטריים:

סיכום כללי:

- כדי לפתור אי-שוויון טריגונומטרי בתחום מסוים נבצע את השלבים הבאים:
1. נהפוך את סימן אי השוויון לסימן שוויון ונפתור את המשוואה המתקבלת.
 2. נסדר את כל הפתרונות על ציר מספרים ונבחר ערך בכל תחום.
 3. נציב את הערכים באי השוויון המקורי ונאמר כי:
 - אם מתקבל פסוק אמת אז תחום זה מהווה פתרון של אי השוויון.
 - אם מתקבל פסוק שקר אז תחום זה אינו פתרון של אי השוויון.
 4. נרכז את כל התחומים ונכתוב את הפתרון המלא.

הערה:

במידה והמשוואה אינה מוגדרת עבור ערך מסוים הערך הזה מוכנס גם לציר המספרים.

שאלות:

פתור את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

- | | |
|---|---|
| (1) $[0, 180^\circ] \sin x < \frac{1}{2}$ | (2) $[0, 1.5\pi] 2\cos x - \sqrt{3} \geq 0$ |
| (3) $(-90^\circ, 90^\circ) 2\cos^2 x + \sin x \geq 1$ | (4) $[0, \pi] \sin x + \sin 2x + \sin 3x < 0$ |
| (5) $[0^\circ, 180^\circ] 1 < 2\sin(x + 10^\circ) < \sqrt{3}$ | (6) $(0 < x < \pi) \sin x + \sqrt{3}\cos x \geq 1$ |
| (7) $[0, 2\pi] \tan x + \cot x > 0$ | (8) $(-\pi < x < \pi) \tan(x) > \frac{1}{\sqrt{3}}$ |

תשובות סופיות:

$$(1) \quad 0^\circ \leq x < 30^\circ, 150^\circ \leq x \leq 180^\circ$$

$$(2) \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$$

$$(3) \quad -30^\circ \leq x < 90^\circ$$

$$(4) \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3}$$

$$(5) \quad 20^\circ < x < 50^\circ, 110^\circ < x < 140^\circ$$

$$(6) \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$(7) \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \pi < x < \frac{3}{2}\pi$$

$$(8) \quad -\frac{5\pi}{6} < x < -\frac{\pi}{6}, x \neq -\frac{\pi}{2} : \text{או} \quad \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}, x \neq \frac{\pi}{2}$$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי א

פרק 10 - חשבון דיפרנציאלי - הפונקציה הממשית

תוכן העניינים

1. מושג הפונקציה (ללא ספר)
2. הפונקציה הלינארית (ללא ספר)
3. הפונקציה הריבועית (ללא ספר)
4. הפונקציה המעריכית והלוגריתמית (ללא ספר)
5. הזזות ושיקופים של פונקציות (ללא ספר)
6. תרגול נוסף בתחום הגדרה (ללא ספר)

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי א

פרק 11 - חשבון דיפרנציאלי - גבול של פונקציה

תוכן העניינים

1. הסבר כללי	(ללא ספר)
2. הצבה	168
3. צמצום	169
4. הכפלה בצמוד	170
5. גבולות טריגונומטריים	171
6. פונקציה שואפת לאינסוף	173
7. איקס שואף לאינסוף	174
8. הגבול של אוילר	176

הצבה

שאלה

חשבו את הגבולות הבאים :

א. $\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1$

ב. $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2}$

ג. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3}$

ד. $\lim_{x \rightarrow 100} 20$

תשובה

א. 21 ב. $\frac{11}{12}$ ג. 2 ד. 20

צמצום

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x - 1} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 5x + 1} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[5]{x} + 1}{x + 1} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 4x^2 + x - 4} \quad (9)$$

תשובות סופיות

-3 (5)	$n-1$ (4)	6 (3)	$\frac{10}{8.5}$ (2)	$\frac{5}{6}$ (1)
$\frac{1}{5}$ (10)	$\frac{8}{17}$ (9)	27 (8)	3 (7)	32 (6)

הכפלה בצמוד

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x+6}}{2x-6} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}} + x - 1}{\sqrt[3]{x}} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{3x+1}}{1 - \sqrt{2x-1}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x^2+x+2}+x} \quad (8)$$

תשובות סופיות

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{6} \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} \quad (9)$$

$$4 \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (6)$$

$$-\frac{1}{12} \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \quad (7)$$

$$\frac{3}{8} \quad (4)$$

$$-\frac{8}{3} \quad (8)$$

גבולות טריגונומטריים

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול הטריגונומטרי $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{4x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin 2x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{x^3} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{x^2 - 1} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 4x}{\sin 10x} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan 2x \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - \cos x}{\sin^2 x} \quad (17)$$

תשובות סופיות

$\frac{1}{2}$ (5	$\frac{1}{2}$ (4	$\frac{1}{2}$ (3	$\frac{3}{4}$ (2	$\frac{3}{4}$ (1
	$\frac{1}{4}$ (9	4 (8	$\frac{1}{8}$ (7	$\frac{1}{2}$ (6
$\frac{1}{\cos^2 a}$ (13	$-\sin a$ (12	$\cos a$ (11	$-\frac{1}{2}$ (10	
1 (17	$\frac{2}{\pi}$ (16	$\frac{1}{2}$ (15	$\frac{4}{10}$ (14	

זהויות טריגונומטריות שכדאי להכיר

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2} \\ \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \\ \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a-b}{2} \sin \frac{a+b}{2} \\ \tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b} \\ \tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \pi n = 0 \\ \cos \pi n = (-1)^n \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \left(a + \frac{\pi}{2} \right) = \cos a \\ \cos \left(a + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin a \end{array} \right.$$

פונקציה שואפת לאינסוף

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} ((\ln x)^2 + 2 \ln x - 3) \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \cot x \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[4]{x-1}}{\sqrt{x-1}} \quad (13)$$

תשובות סופיות

ϕ (4)	$-\infty$ (3)	ϕ (2)	ϕ (1)
ϕ (8)	∞ (7)	∞ (6)	$-\infty$ (5)
$-\infty$ (12)	ϕ (11)	1 (10)	0 (9)
			$-\infty$ (13)

X שואף לאינסוף

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים :

- | | |
|--|---|
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x + e^x \quad (2)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$ |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (4)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (3)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (6)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (5)$ |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (8)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (7)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad (10)$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad (9)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (12)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad (11)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (14)$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{\frac{x+1}{2}}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (13)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad (16)$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (15)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad (18)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad (17)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad (20)$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \left(\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \right) \quad (19)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + kx} - x) \quad (22)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) \quad (21)$ |
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \quad (24)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \quad (23)$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}) \quad (26)$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad (25)$ |

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^5}{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^4} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-4)^{10} (3x^2-1)^4}{x^2 (2x-5)^{10} (x^3+1)^2} \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(5 \cdot 2^{x+2} + 6 \cdot e^{x+1}) - x] \quad (29)$$

תשובות סופיות

$-\infty$ (4	4 (3	$-\frac{\pi}{2}$ (2	0 (1
-1 (8	1 (7	-5 (6	0 (5
$\frac{1}{4}$ (12	$\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (11	1.5 (10	-3 (9
2 (16	$\frac{1}{9}$ (15	4 (14	0 (13
	0 (19	$e^{\frac{1}{3}}$ (18	$\ln 3$ (17
(20) אם $b \neq 0$: $\lim = \sqrt[5]{\frac{a}{b}}$. אם $b = 0, a > 0$: ∞ . אם $b = 0, a < 0$: $-\infty$.			
$-\frac{1}{2}$ (24	$\frac{1}{2}$ (23	$\frac{k}{2}$ (22	2.5 (21
$\frac{5}{4}$ (28	$\frac{3^4}{2^{10}}$ (27	$\frac{a-b}{2}$ (26	$\frac{1}{2}$ (25
			$\ln(6e)$ (29

הגבול של אוילר

שאלות

חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בגבול של אוילר : $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$) :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + x + 2}\right)^{10x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 4}\right)^{4x^2} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{x}\right)^x \quad (9)$$

תשובות סופיות

e^3 (5)	e^{-1} (4)	e^2 (3)	1 (2)	$e^{\frac{1}{2}}$ (1)
	e (9)	e^{30} (8)	e^{-12} (7)	e (6)

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי א

פרק 12 - חשבון דיפרנציאלי - רציפות של פונקציה

תוכן העניינים

1. רציפות של פונקציה.....177

רציפות של פונקציה

שאלות

בשאלות 1-6: בדקו את רציפות הפונקציות ב"נקודת התפר" ¹ שלהן, ובשאלות 1 ו-2, שרטטו גם את גרף הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ 5-x & x > 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x < 2 \\ x-3 & x \geq 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \leq 1 \\ |x-2| & 1 < x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ x-2 & x > 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x > 0 \\ 2 & x = 0 \\ 1+e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4+e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (5)$$

7) עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 3-6: רשמו עבור כל נקודת אי רציפות מאיזה סוג היא. בנוסף, הדגימו פונקציה בעלת נקודת אי רציפות מסוג שני.

בשאלות 8-11: מה צריך להיות הערך הקבוע של k , על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות לכל x ?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases} \quad (9)$$

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 + x - 2 & x \leq 2 \\ 5kx - 6 & x > 2 \end{cases} \quad (8)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - k & x \leq 0 \\ x^{2x} & x > 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x-2} & x \neq 2 \\ k & x = 2 \end{cases} \quad (10)$$

הערה: שאלה 11 ניתן לפתור רק בעזרת 'כלל לופיטל'.

¹ נקודת תפר היא הנקודה בה נוסחת הפונקציה משתנה.

בשאלות 12-15: מה צריכים להיות הערכים של הקבועים a ו- b , על מנת שהפונקציות תהיינה רציפות בתחום הגדרתן?

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{2x} & 0 < x < \pi \\ a \cos x & x \geq \pi \end{cases} \quad (12)$$

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt[3]{x} + x^2 & x < -1 \\ bx^2 + x - 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 4 \frac{\sqrt{x-1+a} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x > 1 \end{cases} \quad (13)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^{1-x}} & x > 1 \\ (x-1)\ln(x+1) + b & 0 \leq x \leq 1 \\ a \frac{2^{\frac{1}{x}} - 2}{2^{\frac{1}{x}} + 4} & x < 0 \end{cases} \quad (14)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} & x < 1 \\ ax^2 + b & 1 \leq x \leq 2 \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x > 2 \end{cases} \quad (15)$$

הערה: שאלות 14-15 ניתן לפתור רק בעזרת 'כלל לופיטל'.

(16) הוכיחו או הפריכו:

- א. סכום שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
- ב. הפרש שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
- ג. מכפלת שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.
- ד. מנתן של שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.

(17) ידוע ש- f רציפה ו- g לא רציפה. האם $f+g$ רציפה? הוכיחו זאת.

$$(18) \text{ תהי } f(x) = \begin{cases} |x|-1 & |x+1| \geq 4 \\ 2 & |x+1| < 4 \end{cases}$$

א. שרטטו את גרף הפונקציה.

ב. מצאו את נקודות האי רציפות של הפונקציה ואת סוגן (במידה ויש).

ג. תהי $g(x) = x + \frac{1}{x}$, ותהי $f(x)$ מוגדרת וחיובית לכל x .

האם ההרכבה $g(f(x))$ בהכרח רציפה לכל x ?

(19) תהי f פונקציה חסומה בקטע $(0,1)$.

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < 1 \\ x^2 & 1 \leq x < 2 \end{cases} \text{ על ידי } g \text{ הפונקציה המוגדרת בקטע } (0,2),$$

א. האם ניתן שהנקודה $x_0 = 1$ היא נקודת אי-רציפות סליקה של g ? נמקו.

ב. האם g חסומה בקטע $(0,2)$? נמקו.

(20) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ פונקציה שמקיימת $f(x+y) = f(x)f(y)$ לכל $x, y \in \mathbb{R}$.

נניח ש- f רציפה ב- $x=0$.

הוכיחו ש- f רציפה לכל x .

(21) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ פונקציה שמקיימת $f(x+y) = [f(x)f(y)]^2$ לכל $x, y \in \mathbb{R}$.

נניח ש- f רציפה ב- $x=0$.

הוכיחו ש- f רציפה לכל x .

$$(22) \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = x - \frac{1}{2} \lfloor 2x \rfloor$$

הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה f חסומה לכל x .

ב. הפונקציה f רציפה לכל x .

ג. הפונקציה f מונוטונית לכל x .

ד. הפונקציה f זוגית או אי-זוגית לכל x .

(23) ענו על הסעיפים הבאים :א. פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)| \leq x$ לכל x .הוכיחו שהפונקציה רציפה ב- $x = 0$.ב. פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)| \leq \sin x$ לכל x .

הוכיחו שהפונקציה רציפה באינסוף נקודות שונות.

(24) הפונקציה $f(x)$ רציפה לכל x .ידוע כי עבור $x \neq \pm 1$, $f(x)$ נתונה על ידי הנוסחה $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{1-|x|}$.מצאו את הנוסחה של $f(x)$ לכל x .**(25)** הפונקציות $f(x)$ ו- $3g(x) + 2f(x)$ רציפות לכל x .הוכיחו שהפונקציה $|f(x) - g(x)|$ רציפה לכל x .**(26)** תהי $f(x)$ מוגדרת לכל x ומקיימת $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)(1-f(x))] = 0$.א. הוכיחו או הפריכו: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ או $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

ב. האם תשתנה תשובתך לסעיף א' אם נחליף את המילה 'מוגדרת' במילה 'רציפה'?

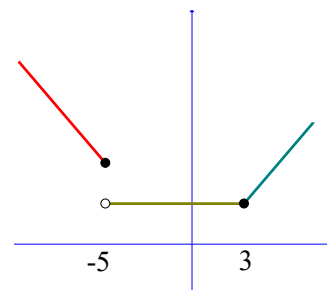
(27) תהי f מוגדרת לכל x .

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות :

א. אם $f(\sin x)$ רציפה לכל x , אז f רציפה לכל x .ב. אם $\sin(f(x))$ רציפה לכל x , אז f רציפה לכל x .ג. אם לכל x_0 מתקיים $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 4$, אזי $f(x) = 4$ לכל x .כיצד תשתנה תשובתך, אם ידוע בנוסף כי f רציפה לכל x ?

תשובות סופיות

- (1) רציפה.
- (2) רציפה.
- (3) רציפה בנקודה $x=1$, לא רציפה בנקודה $x=2$.
- (4) רציפה בנקודות $x=0,1$, לא רציפה בנקודה $x=2$.
- (5) לא רציפה.
- (6) לא רציפה.
- (7) 5. סליקה. 6. סליקה. 4. סוג ראשון. 3. סליקה.
- (8) $k=1$
- (9) $k=4$
- (10) $k=\frac{2}{3}$
- (11) $k=-1$
- (12) $a=0, b=\frac{1}{2}$
- (13) $a=2, b=1$ או $a=1, b=2$
- (14) $a=-2e^{-1}, b=e^{-1}$
- (15) $a=\frac{e}{3}, b=-\frac{e}{3}$
- (16) שאלת הוכחה.
- (17) שאלת הוכחה.
- (18) א.



- ב. הפונקציה רציפה לכל $x \neq -5$. ב-5 יש אי רציפות מסוג ראשון. ג. לא.
- (19) א. לא. ב. כן.
- (20) שאלת הוכחה.

(21) שאלת הוכחה.

(22) א. טענה נכונה. ב. טענה לא נכונה. ג. טענה לא נכונה. ד. טענה לא נכונה.

(23) שאלת הוכחה.

$$f(x) = \begin{cases} -\pi & x = -1 \\ \frac{\sin(\pi x)}{1-|x|} & x \neq \pm 1 \\ \pi & x = 1 \end{cases} \quad \textbf{(24)}$$

(25) שאלת הוכחה.

(26) שאלת הוכחה.

(27) שאלת הוכחה.

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי א

פרק 13 - חשבון דיפרנציאלי - הגדרת הנגזרת, גזירות של פונקציה ונגזרות
חד-צדדיות

תוכן העניינים

1. הגדרת הנגזרת וגזירות של פונקציה.....183
2. נגזרות חד צדדיות.....190

הגדרת הנגזרת, גזירות של פונקציה

שימו לב

בפרק זה יש לדעת גזירת פונקציות לפי נוסחאות גזירה, כפי שנלמד בבית הספר. למי שלא למדו זאת כדאי לעבור קודם לפרק הבא, ללמוד את הנושא, ורק אחר כך לחזור לכאן.

שאלות*

בשאלות 1-6 חשבו את הנגזרת של הפונקציה הנתונה על פי ההגדרה:

$$(1) \quad f(x) = x^2 + 4x + 1 \quad (2) \quad f(x) = \frac{1}{x+1} \quad (3) \quad f(x) = \sin 4x$$

$$(4) \quad f(x) = e^x \quad (5) \quad f(x) = \ln x \quad (6) \quad f(x) = \sqrt{x+10}$$

$$(7) \quad \text{חשבו את } f'(0), \text{ אם נתון כי } f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-44).$$

$$(8) \quad \text{חשבו את } f'(0), \text{ אם נתון כי } f(x) = 2x(|x|+1)\sqrt{1+x+x^2}.$$

$$(9) \quad \text{חשבו את } f'(0), \text{ אם נתון כי } f(x) = x \cdot z(x) \text{ כאשר } z(0) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} z(x) = 4.$$

$$(10) \quad \text{נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} & x > 0 \\ -(x+1)^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

א. מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה רציפה.

ב. בדקו על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x=1$.
האם קיים משיק בנקודה זו?

$$(11) \quad \text{נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (n \text{ טבעי}).$$

א. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה בנקודה $x=0$?

ב. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה ברציפות בנקודה $x=0$?

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

$$(12) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} x^n \arctan \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (n \text{ טבעי}).$$

א. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה בנקודה $x = 0$?

ב. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה ברציפות בנקודה $x = 0$?

(13) חשבו את הגבולות הבאים:

$$\text{א. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(4+x) - \ln 4}{x} \quad \text{ב. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1+x} - e}{x}$$

(14) נתון כי f גזירה בנקודה x_0 . הוכח כי:

$$\text{א. } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\text{ב. } 2x_0 f(x_0) - x_0^2 f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 f(x_0) - x_0^2 f(x)}{x - x_0}$$

(15) נתון כי f גזירה וזוגית. הוכיחו כי f' אי זוגית.

(16) נתונה פונקציה המוגדרת ב- $[a, b]$ ומקיימת לכל x, y ב- $[a, b]$:

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$$

הוכיחו כי f גזירה ב- $[a, b]$ וחשבו את נגזרתה.

$$(17) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ x^3 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

חשבו את $f'(x)$ על פי ההגדרה.

$$(18) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

חשבו את $f'(x)$ על פי ההגדרה.

$$(19) \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = |\sin^5 x|$$

א. חשבו את $f'(x)$.

ב. מצאו את כל הנקודות עבורן $f'(x) = 0$.

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

(20) הוכיחו או הפריכו :

- א. אם h גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0 , אז $f = g + h$ אינה גזירה ב- x_0 .
- ב. אם h אינה גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0 , אז $f = g + h$ אינה גזירה ב- x_0 .
- ג. אם h אינה גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0 , אז $f = g \cdot h$ אינה גזירה ב- x_0 .
- ד. אם h גזירה ב- x_0 ו- g אינה גזירה ב- x_0 , אז $f = g \cdot h$ אינה גזירה ב- x_0 .

(21) הוכיחו או הפריכו :

- א. אם f גזירה, אז $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right] = f'(x)$.
- ב. אם הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right]$ קיים וסופי, אז f גזירה.

(22) הוכיחו או הפריכו :

- א. אם f גזירה ב- (a, b) ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$, אז $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \infty$.
- ב. אם f גזירה ב- (a, b) ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \infty$, אז $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$.

(23) נתון כי $f(x)$ רציפה ב- $x = 4$, ומקיימת $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - \pi - 10(x - 4)}{x - 4} = 0$.

הוכיחו ש- f גזירה ב- $x = 4$, וחשבו את $f'(4)$.

(24) תהי f פונקציה רציפה בסביבת הנקודה $x = 0$ המקיימת $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

א. הוכיחו כי $f(0) = 0$.

ב. הוכיחו כי f גזירה ב- $x = 0$ ו- $f'(0) = 0$.

(25) תהי f פונקציה גזירה על כל הישר, ונתון כי $f(0) = 0$ ו- $f'(0) = k$.

הוכיחו כי $\lim_{x \rightarrow \infty} x f\left(\frac{1}{x}\right) = k$.

(26) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה בנקודה x_0 .

א. אם $f(x_0) \neq 0$, הוכיחו שגם $|f|$ גזירה ב- x_0 .

ב. אם $f(x_0) = 0$, הראו שייתכן כי $|f|$ גזירה ב- x_0 וייתכן שלא.

(27) תהינה $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות גזירות בנקודה x_0 .

נגדיר $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

הראו שאם $f(x_0) \neq g(x_0)$, אז h גזירה ב- x_0 .

(28) תהי f פונקציה זוגית ב- $\mathbb{R}$.

הוכיחו כי אם f גזירה ב-0, אז $f'(0) = 0$.

הערה: פתרו בשתי דרכים שונות.

(29) נתונה פונקציה $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $f(xy) = f(x) + f(y)$,

לכל $x, y \in (0, \infty)$.

נתון כי f גזירה בנקודה $x=1$.

א. הוכיחו כי $f(1) = 0$ ו- $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$.

ב. הראו כי f גזירה, ושלכל $x > 0$, $f'(x) = \frac{f'(1)}{x}$.

(30) נתון כי f פונקציה גזירה המקיימת $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$.

הוכיחו ש- f פונקציה לינארית.

(31) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו את הטענה הבאה:

אם f גזירה ב- x_0 , אז $f'(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + a_n) - f(x_0)}{a_n}$

לכל סדרה $a_n \rightarrow 0$.

ב. תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה בנקודה $x_0 = 1$, ו- $f(1) = 1$.

הראו שאם $k \in \mathbb{N}$, אז

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\left(f\left(1 + \frac{1}{n}\right) + f\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \right) - k \right] = \frac{k(k+1)}{2} f'(1)$$

ג. חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{10}{n}} - 10 \right]$.

(32) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו שפונקציית דיריכלה $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ לא גזירה בכל מקום.

ב. הוכיחו שהפונקציה $f(x) = (x-1)^2 D(x)$ גזירה רק בנקודה $x=1$.

(33) פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)| \leq x^2$ לכל x .

הוכיחו שהפונקציה גזירה ב- $x=0$.

(34) פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)| \leq \sin^2 x$ לכל x .

הוכיחו שהפונקציה גזירה באינסוף נקודות שונות.

(35) תהי f פונקציה גזירה ב- x_0 .

א. הוכיחו כי $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$.

ב. תנו דוגמה של פונקציה רציפה f , באופן שהגבול בסעיף א' קיים,

אך $f'(x_0)$ אינו קיים.

ג. הביעו באמצעות $f'(x_0)$ את הגבול $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0-2h) - f(x_0+3h)}{h}$.

(36) תהי f פונקציה גזירה פעמיים ב- x_0 .

א. הוכיחו כי $f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}$.

ב. תנו דוגמה של פונקציה f , באופן שהגבול בסעיף א' קיים,

אך $f''(x_0)$ אינו קיים.

הערה: פתרו את סעיף א' רק אחרי למידת הנושא 'כלל לופיטל'.

(37) נתון כי $f(x)$ רציפה בנקודה $x=a$, ונגדיר פונקציה חדשה $z(x) = (x-a)f(x)$. הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה $z(x)$ גזירה בנקודה $x=a$.

ב. $z'(x)$ רציפה ב- $x=a$.

תשובות סופיות

$$(1) \quad f'(x) = 2x + 4 \quad (2) \quad f(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \quad (3) \quad f'(x) = 4 \cos 4x$$

$$(4) \quad f'(x) = e^x \quad (5) \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad (6) \quad f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+10}}$$

$$(7) \quad 44! \quad (8) \quad 2 \quad (9) \quad 4$$

(10) א. רציפה לכל x . ב. לא גזירה בנקודה $x=1$. קיים משיק אנכי בנקודה.

$$(11) \quad \text{א. } n > 1. \quad \text{ב. } n > 2.$$

$$(12) \quad \text{א. } n > 1. \quad \text{ב. } n > 1.$$

$$(13) \quad \text{א. } \frac{1}{4}. \quad \text{ב. } e.$$

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

(16) שאלת הוכחה. $f' = 0$

(17) הפונקציה גזירה רק ב- $x=0$, ומתקיים: $f'(0) = 0$.

(18) הפונקציה גזירה רק ב- $x=1$, ומתקיים: $f'(1) = 0$.

$$(19) \quad \text{א. } f'(x) = \begin{cases} 5 \sin^4 x \cos x & 2n\pi < x < (2n+1)\pi \\ 0 & x = n\pi \\ -5 \sin^4 x \cos x & (2n+1)\pi < x < (2n+2)\pi \end{cases} \quad \text{ב. } x = \frac{\pi}{2} n$$

(20) שאלת הוכחה.

(21) שאלת הוכחה.

(22) שאלת הוכחה.

(23) שאלת הוכחה.

(24) שאלת הוכחה.

(25) שאלת הוכחה.

(26) שאלת הוכחה.

(27) שאלת הוכחה.

(28) שאלת הוכחה.

(29) שאלת הוכחה.

(30) שאלת הוכחה.

(31) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. 55

(32) שאלת הוכחה.

(33) שאלת הוכחה.

(34) שאלת הוכחה.

(35) א. שאלת הוכחה. ב. $f(x) = |x|$. ג. $-5f'(x_0)$.(36) א. שאלת הוכחה. ב. $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$.

(37) שאלת הוכחה.

לפתרונות מלאים בוידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

נגזרות חד-צדדיות

שאלות

1) תארו שתי דרכים שונות לבדיקת גזירות של פונקציה מפוצלת בנקודות התפר שלה (נקודה שבה מתחלפת נוסחת הפונקציה).

השתמשו בפונקציה $f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x & x \geq 2 \\ x^3 + 12 & x < 2 \end{cases}$ על מנת להדגים שתי שיטות אלה. בנוסף, הסבירו מתי יש להשתמש בכל אחת משיטות אלה.

בשאלות 2-9 בדקו את גזירות הפונקציות בתחום הגדרתן, בכל דרך שתבחרו. בנוסף, רשמו נוסחה עבור הנגזרת של כל אחת מהפונקציות.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x & x \geq 2 \\ x^3 - 14 & x < 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & x \geq 2 \\ x^3 - 14 & x < 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+2x) & -0.5 < x < 0 \\ x^2 + 2x & x \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x & x \geq 2 \\ x^3 + 12 & x < 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f(x) = 3x^2 + x|x| + 1 \quad (7)$$

$$f(x) = 2 + 4|x-1| \quad (6)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (8)$$

10) בדקו האם הפונקציה משאלה 5 גזירה פעמיים בנקודה $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & x \geq -1 \\ \frac{1}{x} + a & x < -1 \end{cases} \quad (11) \text{ נתונה הפונקציה}$$

- א. עבור איזה ערך של הקבוע a הפונקציה רציפה בנקודה $x = -1$?
- ב. עבור ערך ה- a שקיבלת בסעיף א', בדקו על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x = -1$. האם קיים משיק בנקודה זו?

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

12 מצאו עבור אלו ערכים של הקבועים a ו- b הפונקציה הבאה גזירה בנקודת

$$\text{התפר: } f(x) = \begin{cases} \ln^3 x & 0 < x \leq e \\ ax + b & x > e \end{cases}$$

עבור ערכים אלו, רשמו נוסחה עבור הנגזרת.

13 מצאו עבור אלו ערכים של הקבועים a ו- b הפונקציה הבאה גזירה בנקודת

$$\text{התפר: } f(x) = \begin{cases} e^x & 0 < x \leq 1 \\ ax + b & x > 1 \end{cases}$$

עבור ערכים אלו, רשמו נוסחה עבור הנגזרת.

$$\text{14 נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + 4x & x < 0 \\ px + q & x \geq 0 \end{cases}$$

קבעו עבור אילו ערכים של הקבועים p ו- q הפונקציה הנתונה:
א. רציפה. ב. גזירה.

15 חשבו את $f'(0)$, עבור הפונקציה: $f(x) = |x^4 - x^3 + \sin(10x) - 1|$

$$\text{16 נתונה הפונקציה: } f(x) = \begin{cases} \sqrt{|\cos \pi x|} & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

הוכיחו שהפונקציה לא גזירה לכל x ממשי.

תזכורת (הערך השלם)

פונקציית הערך השלם $[x]$ מחזירה לכל מספר ממשי x את המספר השלם הגדול ביותר, שקטן או שווה ל- x (מעגלת כלפי מטה). למשל: $[-4.1] = -5$, $[4.1] = 4$.

17 נתונה הפונקציה $f(x) = [x] - [-x]$.
חשבו את $f'(x)$.

18 נתונה הפונקציה $f(x) = [x] \sin(\pi x)$.
חשבו את $f'(x)$ על פי ההגדרה.

19 נתונה הפונקציה $f(x) = [x](1 - \cos(\pi x))$.
חשבו את $f'(x)$.

(20) הוכיחו שאם f היא פונקציה המקיימת $|f(x)| \leq x^2$ לכל x , אז f גזירה ב- $x=0$.

(21) תהי f פונקציה רציפה ב- $x_0=0$. הוכיחו כי הפונקציה $z(x)=|x|f(x)$ גזירה ב- $x_0=0$ אם ורק אם $f(0)=0$.

(22) יהיו f ו- g שתי פונקציות המוגדרות בסביבה מלאה של $x_0 \in \mathbb{R}$. הוכיחו או הפריכו:

א. אם $f(x_0)=g(x_0)$ ו- $f'_-(x_0)=g'_+(x_0)$,

אז הפונקציה z , המוגדרת על ידי $z(x)=\begin{cases} f(x) & x \leq x_0 \\ g(x) & x \geq x_0 \end{cases}$, גזירה ב- x_0 .

ב. אם $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ לא גזירה ב- x_0 ו- $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה ב- $\mathbb{R}$, אז $g \circ f$ איננה גזירה ב- $\mathbb{R}$.

ג. אם g גזירה מימין ב- x_0 והפונקציה f מוגדרת בסביבה מלאה של $g(x_0)$ וגזירה מימין ב- $g(x_0)$, אזי $f \circ g$ גזירה מימין ב- x_0 .

הערה: אין קשר בין הסעיפים.

(23) תהיינה f ו- g פונקציות המוגדרות ב- $\mathbb{R}$. נתון ש- g היא פונקציה רציפה ב- $\mathbb{R}$, ולכל $x > y$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = g\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

הוכיחו כי f גזירה ב- $\mathbb{R}$, ושלכל x ממשי מתקיים $f'(x)=g(x)$.

$$\textbf{(24) נתונה הפונקציה } f(x)=\begin{cases} \frac{1-x}{x} & x \geq 1 \\ \frac{\pi}{4} - \arctan x & x < 1 \end{cases}$$

א. בדקו את רציפות וגזירות f .

ב. בדקו האם f הפיכה בתחום הגדרתה. אם כן, מצאו את $f^{-1}(x)$.

תשובות סופיות

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+8 & x \geq 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-4 & x > 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-5 & x > 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+8 & x \geq 2 \\ 3x^2 & x < 2 \end{cases} \quad (4)$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+2x} & -0.5 < x < 0 \\ 2x+2 & x \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$f'(x) = 4 \ (x > 1) \ , \ f'(x) = -4 \ (x < 1) \quad (6)$$

$$f'(x) = 8x \ (x \geq 0) \ , \ f'(x) = 4x \ (x < 0) \quad (7)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (8)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (9)$$

(10) לא גזירה פעמיים בנקודה $x = 0$.

(11) א. $a = 1$ ב. לא גזירה. לא קיים משיק.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} \ln^2 x & 0 < x < e \\ \frac{3}{e} & x \geq e \end{cases} \quad a = 3/e \quad b = -2 \quad (12)$$

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & 0 < x < 1 \\ e & x \geq 1 \end{cases} \quad a = e \quad b = 0 \quad (13)$$

$$(14) \text{ א. } q = 0 \quad \text{ב. } q = 0, p = 4$$

$$(15) -10$$

(16) שאלת הוכחה.

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Z} \\ \text{undefined} & x \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (17)$$

$$f'(x) = \begin{cases} [x] \cos(\pi x) \pi & x \notin \mathbb{Z} \\ \text{undefined} & x \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (18)$$

$$f'(x) = \begin{cases} [x] \sin \pi x & x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & x \in \mathbb{Z}, x \text{ even} \\ \text{undefined} & x \in \mathbb{Z}, x \text{ odd} \end{cases} \quad (19)$$

לפתרונות מלאים בוידאו של שאלות 20-23 היכנסו לאתר www.GooL.co.il

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & -1 < x \leq 0 \\ \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) & 0 < x < \frac{3\pi}{4} \end{cases} \quad \text{ב.} \quad (24) \quad \text{א. רציפה לכל } x \text{ וגזירה לכל } x \neq 1.$$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי א

פרק 14 - חשבון דיפרנציאלי - נגזרת של פונקציה

תוכן העניינים

1. כללי הגזירה	(ללא ספר)
2. תרגול בכללי הגזירה	195
3. תרגילים נוספים לפי סוגים	199
4. גזירה סתומה	202
5. כלל השרשרת	204
6. גזירה לוגריתמית	207

תרגול בכללי הגזירה

שאלות

גזרו פעמיים את הפונקציות הבאות (בשאלות 27-35 מצאו רק את הנגזרת הראשונה):

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (4)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (9) \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (8) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 32 \quad (12) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (11) \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (10)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (15) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (14) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (13)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (18) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad (17) \quad f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (16)$$

$$f(x) = \cos(x^4) \quad (21) \quad f(x) = \sin(x^3) \quad (20) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1-x) \quad (19)$$

$$f(x) = \ln(\cos x^2) \quad (24) \quad f(x) = \tan(x^2) \quad (23) \quad f(x) = \sin^3 x \quad (22)$$

$$f(x) = (x+1)^{\sin x} \quad (27) \quad f(x) = \arctan(x^2) \quad (26) \quad f(x) = \arcsin(2x+3) \quad (25)$$

$$y = x^{\ln x} \quad (30) \quad f(x) = (\cos x)^{\ln x} \quad (29) \quad f(x) = (\sin x)^x \quad (28)$$

$$y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}} \quad (33) \quad y = x^{\sqrt{x}} \quad (32) \quad y = \sqrt[3]{x} \quad (31)$$

$$y = (x+1)^{(x+1)} \quad (35) \quad y = (x^2 + 1)^x \quad (34)$$

הערה: בשאלות 28 ו-29 נציג שתי דרכי פתרון. מומלץ לצפות בשתייהן.

תשובות סופיות

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{4x^2}, \quad f''(x) = \frac{4}{x^3} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 20x - 62}{(2x+10)^2}, \quad f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4} \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x \cdot (2x^2+24)}{(x^2-4)^3} \quad (4)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4} \quad (5)$$

$$f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, \quad f''(x) = 12 \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \quad (6)$$

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2\ln x - 3}{x^3} \quad (7)$$

$$f'(x) = \frac{2-\ln x}{2x^{1.5}}, \quad f''(x) = \frac{3\ln x - 8}{4x^{2.5}} \quad (8)$$

$$f'(x) = \ln x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x} \quad (9)$$

$$f'(x) = x(2\ln x + 1), \quad f''(x) = 2\ln x + 3 \quad (10)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2(2-x)}, \quad f''(x) = \frac{1}{(4-2x)^2} \quad (11)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x}(\ln x + 1), \quad f''(x) = \frac{-2\ln x}{x^2} \quad (12)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} \left[\frac{(\ln x)^4 - 1}{(\ln x)^3} \right], \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\} \quad (13)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1+2x}{x^4}\right) \quad (14)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2}\right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5x+2}{x^4}\right) \quad (15)$$

$$f'(x) = e^{-2x^2} (1 - 4x^2), \quad f''(x) = -4xe^{-2x^2} (3 - 4x^2) \quad (16)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}} \quad (17)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}, \quad f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{3}x^2 - 1}{(x^2-1)^{5/3}} \quad (18)$$

$$f'(x) = \frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}} \quad (19)$$

$$f'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2, \quad f''(x) = -9x^4 \sin(x^3) + 6x \cdot \cos(x^3) \quad (20)$$

$$f'(x) = -\sin(x^4) \cdot 4x^3, \quad f''(x) = -16x^6 \cos(x^4) - 12x^2 \cdot \sin(x^4) \quad (21)$$

$$f'(x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x, \quad f''(x) = 6\sin x \cos^2 x - 3\sin^3 x \quad (22)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}, \quad f''(x) = \frac{2 \cdot \cos^2(x^2) - 8x^2 \cos(x^2) \sin(x^2)}{\cos^4(x^2)} \quad (23)$$

$$f'(x) = \tan(x^2) \cdot (-2x), \quad f''(x) = \frac{-4x^2}{\cos^2(x^2)} - 2\tan(x^2) \quad (24)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x+3)^2}} \cdot 2, \quad f''(x) = \frac{4(2x+3)}{(1-(2x+3)^2)^{1.5}} \quad (25)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^4}, \quad f''(x) = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2} \quad (26)$$

$$f'(x) = x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln(x+1) + \frac{\sin x}{x+1} \right) \quad (27)$$

$$f'(x) = (\sin x)^x (\ln(\sin x) + \cot x \cdot x) \quad (28)$$

$$f'(x) = (\cos x)^{\ln x} \cdot \left(\frac{\ln(\cos x)}{x} - \tan x \cdot \ln x \right) \quad (29)$$

$$y' = x^{\ln x} \left(\frac{2 \ln x}{x} \right) \quad (30)$$

$$y' = x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x) \quad (31)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot x^{\sqrt{x}} \left(\frac{\ln x}{2} + 1 \right) \quad (32)$$

$$y' = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right)^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{x}}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} \right) \cdot \sqrt{x} \right) \quad (33)$$

$$y' = (x^2 + 1)^x \left(1 \cdot \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \cdot x \right) \quad (34)$$

$$y' = (x+1)^{(x+1)} [\ln(x+1) + 1] \quad (35)$$

תרגילים נוספים לפי סוגים

שאלות

הנגזרת של פונקציית חזקה

(1) גזרו את הפונקציות הבאות:

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| א. $f(x) = x^3$ | ב. $f(x) = x^7$ | ג. $f(x) = x^2$ |
| ד. $f(x) = x^1$ | ה. $f(x) = x^{-3}$ | ו. $f(x) = x^{-1}$ |
| ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ | ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ | ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$ |

הנגזרת של קבוע כפול פונקציה

(2) גזרו את הפונקציות הבאות:

- | | | |
|---------------------------|------------------------------|---------------------------------------|
| א. $f(x) = 2x^3$ | ב. $f(x) = 3x^7$ | ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$ |
| ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$ | ה. $f(x) = 8x^1$ | ו. $f(x) = 3x^{-2}$ |
| ז. $f(x) = \frac{4}{x}$ | ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$ | ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$ |

הנגזרת של קבוע

(3) גזרו את הפונקציות הבאות:

- | | |
|----------------|-------------------------|
| א. $f(x) = 12$ | ב. $f(x) = \frac{7}{8}$ |
|----------------|-------------------------|

הנגזרת של סכום והפרש

(4) גזרו את הפונקציות הבאות:

- | | |
|---------------------------------|---|
| א. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ | ב. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5}$ |
|---------------------------------|---|

הנגזרת של פונקציה חזקה מורכבת

(5) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = (5x - 2)^3$ ב. $f(x) = (x^3 + 6)^5$ ג. $f(x) = 3(x - x^2)^2$

ד. $f(x) = \frac{(5-x)^3}{4}$ ה. $f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3}$

הנגזרת של אחד חלקי איקס

(6) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \frac{3}{x}$ ב. $f(x) = \frac{2}{x}$ ג. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ד. $f(x) = \frac{3}{x^3}$

ה. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x}$ ו. $f(x) = \frac{2}{3-x}$ ז. $f(x) = \frac{6}{x+5}$

הנגזרת של מכפלה

(7) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = (5x+1)(x-3)$

ב. $f(x) = (5x+1)^3(x-3)$

ג. $f(x) = x^3(6-x)^4$

הנגזרת של מנה

(8) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \frac{3x-1}{1+2x}$ ב. $f(x) = \frac{x^2+1}{5x-12}$ ג. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3}$

ד. $f(x) = \frac{x^2+8}{x-1}$ ה. $f(x) = \frac{1}{x}$ ו. $f(x) = \frac{3}{x^3}$

הנגזרת של שורש

(9) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt{x}$ ב. $f(x) = 4\sqrt{x+1}$ ג. $f(x) = \sqrt{x^3-1}$

ד. $f(x) = (3x+1)\sqrt{x}$ ה. $f(x) = x^2\sqrt{x+3}$ ו. $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$

תשובות סופיות

(1)

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & f'(x) = 3x^2 & \text{ב.} & f'(x) = 7x^6 & \text{ג.} & f'(x) = 2x \\ \text{ד.} & f'(x) = 1 & \text{ה.} & f'(x) = 3x^{-4} & \text{ו.} & f'(x) = -\frac{1}{x^2} \\ \text{ז.} & f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{ח.} & f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & \text{ט.} & f'(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{4}} \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & f'(x) = 6x^2 & \text{ב.} & f'(x) = 21x^6 & \text{ג.} & f'(x) = 2x^3 \\ \text{ד.} & f'(x) = \frac{6x^5}{7} & \text{ה.} & f'(x) = 8 & \text{ו.} & f'(x) = -\frac{6}{x^3} \\ \text{ז.} & f'(x) = -\frac{4}{x^2} & \text{ח.} & f'(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} & \text{ט.} & f'(x) = \frac{2}{9\sqrt[3]{x}} \end{array}$$

0. ב.

0. א. (3)

$$\text{א. (4)} \quad f'(x) = 3x^2 + 4x - 3 \quad \text{ב.} \quad f'(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}$$

$$\text{א. (5)} \quad f'(x) = 15(5x - x)^2 \quad \text{ב.} \quad f'(x) = 15x^2(x^3 + 6)^4$$

$$\text{א.} \quad f'(x) = -\frac{3}{4}(5-x)^2 \quad \text{ב.} \quad f'(x) = 6(x-x^2)(1-2x) \quad \text{ג.} \quad f'(x) = \frac{8(x+1)^3}{3}$$

$$\text{א. (6)} \quad f'(x) = -\frac{3}{x^2} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = \frac{2}{x^2} \quad \text{ג.} \quad f'(x) = -\frac{2}{x^3} \quad \text{ד.} \quad f'(x) = -\frac{9}{x^4}$$

$$\text{א.} \quad f'(x) = -\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = \frac{2}{(3-x)^2} \quad \text{ג.} \quad f'(x) = -\frac{6}{(x+3)^2}$$

$$\text{א. (7)} \quad f'(x) = 10x - 14 \quad \text{ב.} \quad f'(x) = (5x+1)^2(20x-44)$$

$$\text{ג.} \quad f'(x) = x^2(6-x)^3(18-7x)$$

$$\text{א. (8)} \quad f'(x) = \frac{5}{(1+2x)^2} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = \frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2} \quad \text{ג.} \quad f'(x) = \frac{8x}{(x^2+3)^2}$$

$$\text{א.} \quad f'(x) = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{ג.} \quad f'(x) = -\frac{9}{x^4}$$

$$\text{א. (9)} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}} \quad \text{ג.} \quad f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$$

$$\text{א.} \quad f'(x) = \frac{9x+1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ב.} \quad f'(x) = \frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}} \quad \text{ג.} \quad f'(x) = \frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$$

גזירה סתומה

שאלות

(1) גזרו את הפונקציה הסתומה $x^2 + y^5 - 1 = 1$.

(2) גזרו את הפונקציה הסתומה $4 \ln x + 10 \ln y = y^2$.

(3) גזרו את הפונקציה הסתומה $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy}$.

(4) נתונה הפונקציה הסתומה הבאה $e^{y^2-4x} + x^2 y^3 = \sin(y-2x) + 4y + 1$.
חשבו את y' בנקודה $(1,2)$.

(5) נתונה הפונקציה הסתומה הבאה $\sqrt{4x+y^3} + \cos^2(xy) = \ln(x^2 y + 1) + \ln e^3$.
חשבו את y' בנקודה בה $y = 0$.

(6) גזרו את הפונקציה הסתומה $x^y - xy = 10$.

(7) גזרו את הפונקציה הסתומה $x^y - y^x = 1$.

(8) נתונה פונקציה סתומה $xy - y^3 + x^2 - x = 0$.
מצאו את ערך y^n בנקודה בה $y = 1$.

(9) נתון עקום שמשוואתו $yx^2 + e^y = x$.
א. הראו שעבור $x=1$ קיים ערך y אחד ויחיד ומצאו אותו.
ב. חשבו את y'' בנקודה בה $x=1$.

(10) נתון כי המשוואה $h(y) - x + 1 = 2x^3 + 4e^y + 2y$,
מגדירה את $y = y(x)$ כפונקציה סתומה של x .
נתון כי $h(y)$ גזירה ברציפות ויורדת.
הוכיחו כי $y(x)$ יורדת חזק.

תשובות סופיות

$$5y^4 - 1 \neq 0, \quad y' = \frac{-2x}{5y^4 - 1} \quad (1)$$

$$\frac{10}{y} - 2y \neq 0, \quad y' = \frac{-\frac{4}{x}}{\frac{10}{y} - 2y} \quad (2)$$

$$\sqrt{x} \neq 0, \quad \sqrt{x} \neq 1, \quad y' = \frac{\sqrt{y} - 1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{2\sqrt{y}}{1 - \sqrt{x}} \quad (3)$$

$$y'_{(1,2)} = -\frac{14}{11} \quad (4)$$

$$y'_{(1,0)} = 1 \quad (5)$$

$$x^y \cdot \ln x - x \neq 0, \quad y' = \frac{y - x^y \cdot \frac{y}{x}}{x^y \cdot \ln x - x} \quad (6)$$

$$x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y} \neq 0, \quad y' = \frac{-x^y \cdot \frac{y}{x} + y^x \cdot \ln y}{x^y \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y}} \quad (7)$$

$$-1 \quad (8)$$

$$y''_{(1,0)} = -\frac{9}{8} \text{ ב.} \quad (9)$$

$$(10) \text{ שאלת הוכחה.}$$

כלל השרשרת

שאלות

(1) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(4) = 10$.

נגדיר פונקציה חדשה: $g(x) = f(x^2)$.

חשבו את $g'(2)$.

(2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונה פונקציה $f(x)$. נגדיר פונקציה חדשה

$$z(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) - f(4x+1)$$

חשב ואת $z'(x)$

ב. נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(1) = 2$, $f'(1) = e$

$$z(x) = f^2(\ln x) + \frac{1}{f^2(\ln x)}$$

חשבו את $z'(e)$

$$(3) \quad g(x) = \frac{f^2(\sqrt{x}) - 1}{f(\sqrt{x})}$$

ידוע כי $f(10) = f'(10) = 4$

חשבו $g'(100)$

$$(4) \quad g(x) = \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) + 4}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

ידוע כי $f(1) = 1$, $f'(1) = 4$

חשבו $g'(1)$

$$(5) \quad \text{נתונה הפונקציה } g(x) = \frac{f^2(\ln x)}{f(\ln x) + 1}$$

ידוע כי $f(0) = 2$, $f'(0) = 1$

חשבו $g'(1)$.

$$(6) \quad \text{נתונה הפונקציה } g(x) = \frac{f^{10}(4x) + 1}{f\left(\frac{4}{x}\right) + 1}$$

ידוע כי $f(4) = 1$, $f'(4) = 2$

חשבו $g'(1)$.

$$(7) \quad \text{נתונה הפונקציה } g(x) = \frac{\sqrt[4]{f^7(x^2)}}{f(x^4)}$$

ידוע כי $f(1) = 1$, $f'(1) = 4$

חשבו $g'(1)$.

(8) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שהנגזרת של פונקציה זוגית היא פונקציה אי-זוגית והנגזרת של פונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית.

ב. הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית. בדקו האם הפונקציה $f'''(x)$ היא זוגית או אי-זוגית.

ג. הפונקציה $f(x)$ אי-זוגית נגדיר $g(x) = (f(x))^4$.

קבעו האם הפונקציה $g'(x)$ זוגית או אי-זוגית.

ד. ידוע שנגזרת של פונקציה היא זוגית.

האם ניתן לקבוע שהפונקציה היא אי-זוגית?

תשובות סופיות

(1) 40

$$(2) \quad z'(x) = f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) - f'(4x+1) \cdot 4 \quad \text{א.} \quad \text{ב.} \quad z'(e) = 3\frac{3}{4}$$

(3) $\frac{17}{80}$

(4) 36

(5) $\frac{8}{9}$

(6) 44

(7) -2

(8) ב. אי-זוגית. ג. אי-זוגית. ד. לא.

גזירה לוגריתמית

שאלות

גזרו את הפונקציות הבאות :

$$y = \sqrt[4]{\frac{10x-1}{x+1}} \cdot \sqrt[10]{(2x+1)^7} \quad (1)$$

$$y = \left(\sqrt[4]{10x+1} \right)^{2x} \quad (2)$$

$$y = \frac{(x+2)^{3x+4} \cdot (5x+6)}{(7x+8) \cdot (9x+10)} \quad (3)$$

תשובות סופיות

$$y' = y \left[\frac{1}{4} \frac{1}{10x-1} \cdot 10 + \frac{7}{10} \frac{1}{2x+1} \cdot 2 - \frac{1}{4} \frac{1}{x+1} \right] \quad (1)$$

$$y' = \left((10x+1)^{\frac{1}{4}} \right)^{2x} \cdot \frac{1}{4} \left[2^x \cdot \ln 2 \cdot \ln(10x+1) + \frac{1}{10x+1} \cdot 10 \cdot 2^x \right] \quad (2)$$

$$y' = y \left[3 \cdot \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} (3x+4) + \frac{1}{5x+6} \cdot 5 - \frac{1}{7x+8} \cdot 7 - \frac{1}{9x+10} \cdot 9 \right] \quad (3)$$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי א

פרק 15 - חשבון דיפרנציאלי - נגזרות ומשיקים - חזרה

תוכן העניינים

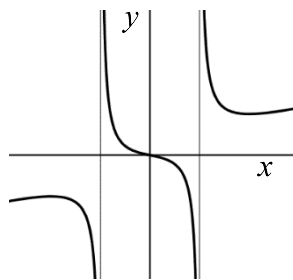
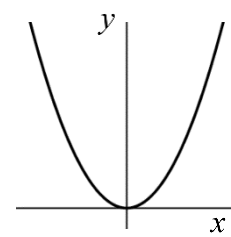
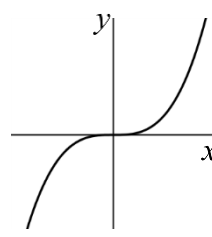
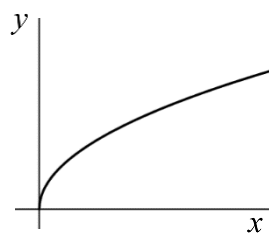
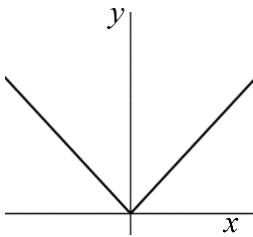
208	1. הקדמה כללית
209	2. גזירת פונקציות
215	3. מציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה
216	4. מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה
219	5. שאלות עם פרמטרים
221	6. שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק מנקודה חיצונית

הקדמה כללית:

סיכום כללי:

פונקציות נפוצות:

הפונקציה $f(x) = x^2$: הפונקציה $f(x) = x^3$: הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$: הפונקציה $f(x) = |x|$:



פונקציה עם מכנה, למשל: $f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1}$:

שיפוע של פונקציה:

- השיפוע m של פונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעל הפונקציה הוא ערך הנגזרת בנקודה $A(x_1, y_1)$, כלומר: $m = f'(x_1)$.
- השיפוע של המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעל הפונקציה שווה לשיפוע הפונקציה בנקודה $A(x_1, y_1)$.
- משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעליה מתקבלת על ידי הנוסחה למציאת ישר: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

הנגזרת:

לכל פונקציה $f(x)$ קיימת פונקציה, הנקראת פונקציית הנגזרת (או רק "הנגזרת") ומסומנת $f'(x)$, המתקבלת ממנה על פי כללי הגזירה.

גזירת פונקציות:

סיכום כללי:

כללי הגזירה:

- כלל גזירה מס' 1: $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
- כלל גזירה מס' 2 (כפל בקבוע): $f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$
- כלל גזירה מס' 3 (נגזרת של קבוע): $f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$
- כלל גזירה מס' 4 (סכום והפרש): $f(x) = u \pm v \Rightarrow f'(x) = u' \pm v'$
- כלל גזירה מס' 5 (פונקציה מורכבת): $f(x) = u^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
- כלל גזירה מס' 6 (נגזרת של $\frac{1}{x}$): $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
- כלל גזירה מס' 7 (מכפלה): $f(x) = u \cdot v \Rightarrow f'(x) = u'v + v'u$
- כלל גזירה מס' 8 (מנה): $f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- כלל גזירה מס' 9 (שורש): $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

שאלות:

1) גזור את הפונקציות הבאות:

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| א. $f(x) = x^3$ | ב. $f(x) = x^7$ | ג. $f(x) = x^2$ |
| ד. $f(x) = x$ | ה. $f(x) = x^{-3}$ | ו. $f(x) = x^{-1}$ |
| ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ | ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ | ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$ |

2) גזור את הפונקציות הבאות:

- | | | |
|---------------------------|------------------------------|---------------------------------------|
| א. $f(x) = 2x^3$ | ב. $f(x) = 3x^7$ | ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$ |
| ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$ | ה. $f(x) = 8x$ | ו. $f(x) = 3x^{-2}$ |
| ז. $f(x) = \frac{4}{x}$ | ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$ | ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$ |

(3) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = 12 \quad \text{ב. } f(x) = \frac{7}{8}$$

(4) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5 \quad \text{ב. } f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5}$$

$$\text{ג. } f(x) = 7x^2 + 23x - 6 \quad \text{ד. } f(x) = 6x^2 + 8x + 4$$

$$\text{ה. } f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^3 \quad \text{ו. } f(x) = \frac{x^4}{8} + 67$$

(5) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = (5x - 2)^3 \quad \text{ב. } f(x) = (x^3 + 6)^5 \quad \text{ג. } f(x) = 3(x - x^2)^2$$

$$\text{ד. } f(x) = \frac{(5-x)^3}{4} \quad \text{ה. } f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3}$$

(6) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \frac{3}{x} \quad \text{ב. } f(x) = -\frac{2}{x} \quad \text{ג. } f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\text{ד. } f(x) = \frac{3}{x^3} \quad \text{ה. } f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{2}{3-x}$$

$$\text{ז. } f(x) = \frac{6}{x+5}$$

(7) גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = (5x+1)(x-3) \quad \text{ב. } f(x) = (5x+1)^3(x-3)$$

$$\text{ג. } f(x) = x^3(6-x)^4 \quad \text{ד. } f(x) = 3x^2 \cdot x$$

$$\text{ה. } f(x) = x^2 \cdot x^3 \quad \text{ו. } f(x) = x(3x+7)$$

$$\text{ז. } f(x) = 3x^3(3x-1) \quad \text{ח. } f(x) = (x-2)(2x^2+3)$$

$$\text{ט. } f(x) = (3x-2)(x^2+10x) \quad \text{י. } f(x) = (3x^4-4x)(2x^2+5x+2)$$

$$\text{יא. } f(x) = x(x-2)(3x-4)$$

(8) גזור את הפונקציות הבאות :

$$\begin{array}{ll} \text{א. } f(x) = (x^2 - 4)^2 & \text{ב. } f(x) = 2x^3(3x + 5)^2 \\ \text{ג. } f(x) = (x^3 + 2)^2(x - 1)^3 & \text{ד. } f(x) = (x^2 + 1)^3(2x - 1)^2 \end{array}$$

(9) גזור את הפונקציות הבאות :

$$\begin{array}{lll} \text{א. } f(x) = \frac{3x - 1}{1 + 2x} & \text{ב. } f(x) = \frac{x^2 + 1}{5x - 12} & \text{ג. } f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3} \\ \text{ד. } f(x) = \frac{x^2 + 8}{x - 1} & \text{ה. } f(x) = \frac{1}{x} & \text{ו. } f(x) = \frac{3}{x^3} \\ \text{ז. } f(x) = \frac{(x - 1)^2}{x + 1} & \text{ח. } f(x) = \frac{(x^2 + 3)^2}{x^2 - 2} & \text{ט. } f(x) = \frac{x^3 - x^2}{2(1 - x)} \\ \text{י. } f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 4} \end{array}$$

(10) גזור את הפונקציות הבאות :

$$\begin{array}{lll} \text{א. } f(x) = \sqrt{x} & \text{ב. } f(x) = 4\sqrt{x + 1} & \text{ג. } f(x) = \sqrt{x^3 - 1} \\ \text{ד. } f(x) = (3x + 1)\sqrt{x} & \text{ה. } f(x) = x^2\sqrt{x + 3} & \text{ו. } f(x) = \frac{x + 3}{\sqrt{x}} \end{array}$$

(11) גזור את הפונקציות הבאות :

$$\begin{array}{ll} \text{א. } f(x) = \sqrt{x + 1} & \text{ב. } f(x) = \sqrt{2x} \\ \text{ג. } f(x) = \sqrt{3x^2 + 1} & \text{ד. } f(x) = \sqrt{10 - 3x} \\ \text{ה. } f(x) = \sqrt{2x^2 + 7x} & \text{ו. } f(x) = 3x^2 - 8\sqrt{x} \\ \text{ז. } f(x) = x^2\sqrt{1 - 2x} & \text{ח. } f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} \\ \text{ט. } f(x) = \frac{x\sqrt{x^2 + 4}}{2} & \text{י. } f(x) = \frac{x + 3}{\sqrt{1 - x^2}} \\ \text{יא. } f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + x - 5\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} & \text{יב. } f(x) = \sqrt{\frac{3 - x}{x}} \\ \text{יג. } f(x) = \sqrt{\frac{1 + x^2}{1 - x}} & \text{יד. } f(x) = \frac{x^2 + 7}{\sqrt{x^2 - 5}} \end{array}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1} \quad \text{טז.}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1} \quad \text{טו.}$$

(12) גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{x-2a}{x-4a} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \frac{ax^2}{3} - \frac{x}{b} + c \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = ax^4 - bx \quad \text{א.}$$

$$f(x) = a\sqrt{bx^2 + c} \quad \text{ד.}$$

(13) גזור פעמיים את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad \text{ד.}$$

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^3 \quad \text{ו.}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad \text{ה.}$$

תשובות סופיות:

- (1) א. $3x^2$ ב. $7x^6$ ג. $2x$ ד. 1 ה. $-\frac{3}{x^4}$ ו. $-\frac{1}{x^2}$
- ז. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ח. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ט. $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$
- (2) א. $6x^2$ ב. $21x^6$ ג. $2x^3$ ד. $\frac{6x^5}{7}$ ה. 8
- ו. $-\frac{6}{x^3}$ ז. $-\frac{4}{x^2}$ ח. $\frac{3}{\sqrt{x}}$ ט. $\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$
- (3) א. 0 ב. 0
- (4) א. $3x^2 + 4x - 3$ ב. $x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}$ ג. $14x + 23$ ד. $12x + 8$ ה. $x - 3x^2$ ו. $0.5x^3$
- (5) א. $15(5x - 2)^2$ ב. $15x^2(x^3 + 6)^4$ ג. $6(x - x^2)(1 - 2x)$
- ד. $-\frac{3}{4}(5 - x)^2$ ה. $\frac{8(x+1)^3}{3}$
- (6) א. $-\frac{3}{x^2}$ ב. $\frac{2}{x^2}$ ג. $-\frac{2}{x^3}$ ד. $-\frac{9}{x^4}$ ה. $-\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2}$
- ו. $\frac{2}{(3-x)^2}$ ז. $-\frac{6}{(x+5)^2}$
- (7) א. $10x - 14$ ב. $(5x+1)^2(20x-44)$ ג. $x^2(6-x)^3(18-7x)$
- ד. $9x^2$ ה. $5x^4$ ו. $6x+7$ ז. $36x^3 - 9x^2$ ח. $6x^2 - 8x + 3$
- ט. $9x^2 + 56x - 20$ י. $36x^5 + 75x^4 + 24x^3 - 24x^2 - 40x - 8$ יא. $9x^2 - 20x + 8$
- (8) א. $4x(x^2 - 4)$ ב. $30x^2(x+1)(3x+5)$ ג. $3(x-1)^2(x^3+2)(3x^3-2x^2+2)$
- ד. $2(2x-1)(x^2+1)^2(8x^2-3x+2)$
- (9) א. $\frac{5}{(1+2x)^2}$ ב. $\frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2}$ ג. $\frac{8x}{(x^2+3)^2}$ ד. $\frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$
- ה. $-\frac{1}{x^2}$ ו. $-\frac{9}{x^4}$ ז. $\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$
- ח. $\frac{2x(x^2+3)(x^2-7)}{(x^2-2)^2}$ ט. $-x$ י. $-\frac{1}{(x+2)^2}$

$$(10) \quad \text{א. } \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ב. } \frac{2}{\sqrt{x+1}} \quad \text{ג. } \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}} \quad \text{ד. } \frac{9x+1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ה. } \frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}}$$

$$\text{ו. } \frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$$

$$(11) \quad \text{א. } \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \quad \text{ב. } \frac{1}{\sqrt{2x}} \quad \text{ג. } \frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}} \quad \text{ד. } -\frac{3}{2\sqrt{10-3x}} \quad \text{ה. } \frac{4x+7}{2\sqrt{2x^2+7x}}$$

$$\text{ו. } 6x - \frac{4}{\sqrt{x}} \quad \text{ז. } \frac{2x-5x^2}{\sqrt{1-2x}} \quad \text{ח. } -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \quad \text{ט. } \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+4}} \quad \text{י. } \frac{1-3x}{(1-x^2)^{1.5}}$$

$$\text{יא. } 3\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{5}{x^2} \quad \text{יב. } -\frac{3}{2x\sqrt{3x-x^2}} \quad \text{יג. } \frac{-x^2+2x+1}{2(1-x)^{1.5}\sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{יד. } \frac{x^3-17x}{(x^2-5)^{1.5}} \quad \text{טו. } -\frac{x+1}{2\sqrt{x}(x-1)^2} \quad \text{טז. } -\frac{x+3}{2(x-1)^2\sqrt{x+1}}$$

$$(12) \quad \text{א. } 4ax^3 - b \quad \text{ב. } \frac{2ax}{3} - \frac{1}{b} \quad \text{ג. } \frac{-2a}{(x-4a)^2} \quad \text{ד. } \frac{abx}{\sqrt{bx^2+c}}$$

$$(13) \quad \text{א. } f'(x) = \frac{2x^2-8}{4x^2}, f''(x) = \frac{4}{x^3}$$

$$\text{ב. } f'(x) = \frac{2x^2+20x-62}{(2x+10)^2}, f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3}$$

$$\text{ג. } f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4}$$

$$\text{ד. } f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}, f''(x) = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$$

$$\text{ה. } f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4}$$

$$\text{ו. } f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, f''(x) = \frac{12(x+1)(x+3)}{(x-1)^5}$$

מציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה:

שאלות:

(14) מצא את שיפוע הפונקציה $f(x) = 2x^3 - 7x$ בנקודה $(2, 2)$.

(15) מצא את שיפוע הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3}$ בנקודה בה $x = -2$.

(16) מצא את שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = 4\sqrt{x}$ בנקודה בה $x = 1$.

תשובות סופיות:

$$m = 17 \quad (14)$$

$$m = 4 \quad (15)$$

$$m = 2 \quad (16)$$

מציאת משוואת המשיק לגרף הפונקציה:

שאלות:

(17) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = 2(4x+3)^3$ בנקודה בה $x = -1$.

(18) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{8}{x+1}$ בנקודה בה $y = 2$.

(19) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = x^2 - 2x - 8$ בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x .

(20) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^4 - 2x$ ששיפועו 2.

(21) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2 - 2}$ בנקודה שבה $x = 1$.

(22) נתון כי הישר $2y - 3x = 3$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = 3\sqrt{x}$. מצא את נקודת ההשקה.

(23) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$ בנקודה בה $x = 1$.

(24) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = 3x^2 - 8\sqrt{x}$ בנקודה בה $x = 4$.

(25) נתונה הפונקציה הבאה $f(x) = 4x - 2\sqrt{x}$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה המקביל לישר $f(x) = 3x - \frac{1}{2}$.

ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .

(26) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}-1}$ ששיפועו -2.

(27) מצא את משוואות המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-x+2}}$ בנקודה שבה $x=2$.

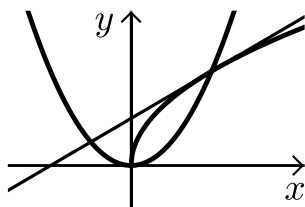
(28) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = \frac{1}{3x^3}$ היוצרים עם הכיוון החיובי של ציר ה- x זווית של 135° .

(29) מצא את משוואות המשיקים המשותפים לפונקציות הבאות: $y = x^2$, $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$.

(30) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}}{x}$ ונתון הישר: $y = 2x$.

- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר הנמצאת ברביע הראשון.
- מצא את משוואות המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שמצאת בסעיף הקודם.
- חשב את השטח שנוצר בין המשיק והצירים.

(31) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$.



- מצא את נקודות החיתוך של הגרפים.
- מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ העובר דרך נקודת החיתוך שמצאת הנמצאת ברביע הראשון.
- מצא את נקודת החיתוך הנוספת של המשיק שמצאת עם גרף הפונקציה $g(x)$.

תשובות סופיות:

$$y = 24x + 22 \quad (17)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2} \quad (18)$$

$$y = 6x - 24, y = -6x - 12 \quad (19)$$

$$y = 2x - 3 \quad (20)$$

$$y = -12x + 9 \quad (21)$$

$$(1, 3) \quad (22)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2} \quad (23)$$

$$y = 22x - 56 \quad (24)$$

$$(25) \quad y = 3x - 1 \quad \text{א.} \quad \text{ב.} \quad \left(\frac{1}{3}, 0\right)$$

$$y = -2x + 8 \quad (26)$$

$$y = \frac{11}{16}x - \frac{15}{8} \quad (27)$$

$$y = -x + 1\frac{1}{3}, y = -x - 1\frac{1}{3} \quad (28)$$

$$y = 2x - 1, y = -2x - 1 \quad (29)$$

$$S = 4\frac{1}{12} \quad \text{ג.}$$

$$(30) \quad y = -1.5x + 3.5 \quad \text{ב.} \quad (1, 2) \quad \text{א.}$$

$$(-0.5, 0.25) \quad \text{ג.}$$

$$(31) \quad y = 0.5x + 0.5 \quad \text{ב.} \quad (0, 0), (1, 1) \quad \text{א.}$$

שאלות עם פרמטרים:

שאלות:

(32) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = ax^2 - 4x$ בנקודה שבה $x = 3$ הוא 8. מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

(33) נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{ax}$, $(a > 0)$.

המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{1}{2}$ הוא בעל שיפוע 1. מצא את ערך הפרמטר a .

(34) נתונה הפונקציה: $y = x^3 + a\sqrt{x}$ (a פרמטר). שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$ הוא 5. מצא את ערך הפרמטר a .

(35) נתונה הפונקציה: $y = 2\sqrt{x} - \frac{A}{x}$ (A פרמטר). שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$ הוא 2. מצא את ערך הפרמטר A .

(36) הישר $y = 4x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.

(37) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{2}{ax+3}$ בנקודה שבה $y = 2$ הוא -4. מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

(38) הישר $y = ax + \frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x) = \frac{2}{x+c}$ בנקודה $x = 0$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- c .

(39) הישר $y = 3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x} + b$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.

(40) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{a}{\sqrt{bx-1}}$ בנקודה $(1, 6)$ הוא -6.

מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת משוואת המשיק.

(41) לאילו ערכי k ישיק הישר $y = -5x + 6$ לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + k$?
לכל ערך כזה של k מצא את נקודת ההשקה.

(42) הפונקציות $y = \frac{1}{x}$ ו- $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$ משיקות זו לזו.
מצא את k ואת נקודת ההשקה.

תשובות סופיות:

$$a = 2, y = 8x - 18 \quad (32)$$

$$a = 2 \quad (33)$$

$$a = 4 \quad (34)$$

$$A = 1 \quad (35)$$

$$(-1, 5), y = 4x + 9 \quad (36)$$

$$a = 2, y = -4x - 2 \quad (37)$$

$$a = -\frac{1}{8}, c = 4 \quad (38)$$

$$b = 4, (4, 12) \quad (39)$$

$$b = 2, a = 6, y = -6x + 12 \quad (40)$$

$$k = \frac{158}{27} : \left(\frac{1}{3}, \frac{13}{3}\right) \text{ או } k = 6 : (1, 1) \quad (41)$$

$$(1, 1), k = 1.5 \quad (42)$$

שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק מנקודה חיצונית:

שאלות:

(43) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. בטא באמצעות t את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^2 + 1$ בנקודה שבה $x = t$.
- ב. מצא את ערכיו של t אם נתון שהמשיק עובר בנקודה $(-1, 1)$.

(44) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = 5x - x^2$ העוברים דרך הנקודה $(3, 7)$.

(45) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = x^2 + 5x - 6$ העוברים דרך הנקודה $(0, -10)$.

(46) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = 12x - x^3$ העוברים דרך הנקודה $(2, 24)$.

(47) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ העובר בנקודה $(3, 0)$.

(48) מצא משוואת המשיק לפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ אם ידוע ששטח המשולש שהוא יוצר עם הצירים הוא 4.5 יחידות שטח.

(49) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-2}}$ העוברים דרך הנקודה $(2, 3)$.

תשובות סופיות:

ב. $t = 0, -2$. (43) $y = 2tx - t^2 + 1$ א.

(44) $y = x + 4$, $y = -3x + 16$

(45) $y = 9x - 10$, $y = x - 10$

(46) $y = 12x$, $y = -15x + 54$

(47) $y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$

(48) $y = -\frac{1}{16}x + \frac{3}{4}$

(49) $y = -x + 5$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי א

פרק 16 - חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקציות טריגונומטריות - חזרה

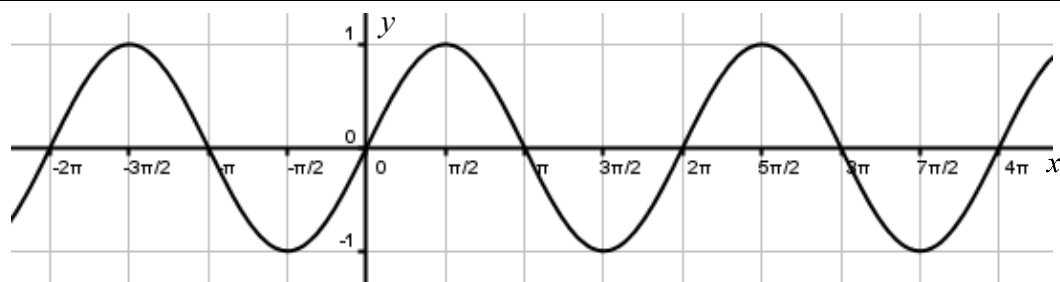
תוכן העניינים

223	1. הגדרות כלליות
225	2. גזירה של פונקציות טריגונומטריות
227	3. שאלות עם משיקים
229	4. מציאת תחום ההגדרה של פונקציות טריגונומטריות
230	5. מציאת נקודות קיצון
231	6. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים
232	7. מציאת נקודות פיתול ותחומי קעירות
233	8. חקירת פונקציה טריגונומטרית

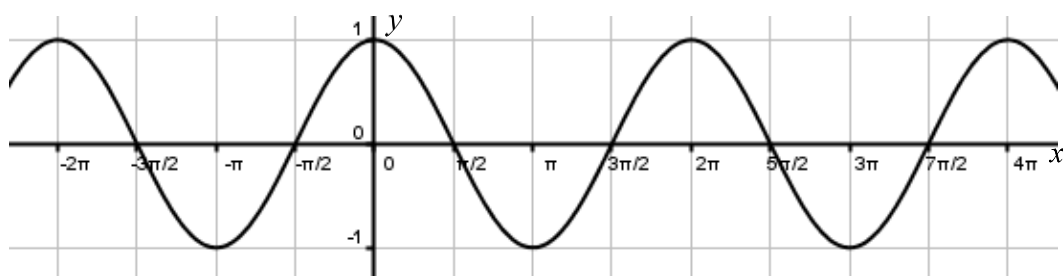
הגדרות כלליות:

סיכום כללי:

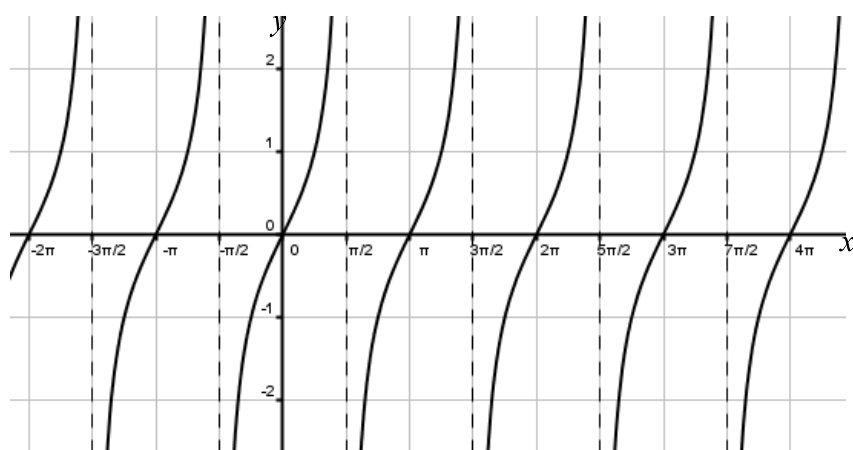
תיאור גרפי של פונקציית הסינוס : $y = \sin x$



תיאור גרפי של פונקציית הקוסינוס : $y = \cos x$



תיאור גרפי של פונקציית הטנגנס : $y = \tan x$



הנגזרות הטריגונומטריות היסודיות:

הפונקציה	הנגזרת
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \tan x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = \cot x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

זוגיות של פונקציות:

- פונקציה $f(x)$ תקרא זוגית אם היא מקיימת את התכונה הבאה: $f(x) = f(-x)$.
- פונקציה $f(x)$ תקרא אי-זוגית אם היא מקיימת את התכונה הבאה: $f(x) = -f(-x)$.
- פונקציה אשר אינה מקיימת אף אחת מהתכונות הנ"ל אינה זוגית ואינה אי-זוגית.

מחזוריות של פונקציות:

(1) פונקציה $f(x)$ תיקרא מחזורית במחזור T אם היא מקיימת: $f(x+T) = f(x)$ לכל x בתחום הגדרתה.

(2) מחזור של פונקציות טריגונומטריות:

- הפונקציה $f(x) = \sin x$ מחזורית במחזור $T = 2\pi$ שכן: $\sin(x+2\pi) = \sin x$.
- הפונקציה $f(x) = \cos x$ מחזורית במחזור $T = 2\pi$ שכן: $\cos(x+2\pi) = \cos x$.
- הפונקציה $f(x) = \tan x$ מחזורית במחזור $T = \pi$ שכן: $\tan(x+\pi) = \tan x$.
- הפונקציה $f(x) = \cot x$ מחזורית במחזור $T = \pi$ שכן: $\cot(x+\pi) = \cot x$.

גזירה של פונקציות טריגונומטריות:

שאלות:

(1) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sin x + 3\cos x + x$

ב. $f(x) = 2x \sin x + 4 \tan x$

ג. $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x}$

(2) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sin 3x + 2 \cos 5x$

ב. $f(x) = \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x}$

(3) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sin^3 x$

ב. $f(x) = 2 \cos^4 x$

ג. $f(x) = \sin^2 x$

ד. $f(x) = \sin^3 2x$

ה. $f(x) = \cos^2 2x$

ו. $f(x) = \tan^2 4x$

(4) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sqrt{\sin 3x}$

ב. $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$

(5) גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$

ב. $f(x) = \sin^4 2x - \cos^4 2x$

ג. $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } \cos x - 3\sin x + 1 \quad \text{ב. } 2\sin x + 2x \cos x + \frac{4}{\cos^2 x} \quad \text{ג. } \frac{\cos x}{(1 + \sin x)^2}$$

$$(2) \quad \text{א. } 3\cos 3x - 10\sin 5x \quad \text{ב. } -\frac{2}{1 + \sin 2x}$$

$$(3) \quad \text{א. } 3\sin^2 x \cdot \cos x \quad \text{ב. } -8\cos^3 x \sin x \quad \text{ג. } \sin 2x$$

$$\text{ד. } 6\sin^2 2x \cos 2x \quad \text{ה. } -2\sin 4x \quad \text{ו. } \frac{8 \tan 4x}{\cos^2 4x}$$

$$(4) \quad \text{א. } \frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}} \quad \text{ב. } \frac{\cos^2 2x + 1}{\cos 2x \sqrt{\cos 2x}}$$

$$(5) \quad \text{א. } 2\sin 2x \quad \text{ב. } 4\sin 4x \quad \text{ג. } -\sin 4x$$

שאלות עם משיקים:

שאלות:

(6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה: $f(x) = \cos x$ בנקודה $A\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(7) מצא את משוואת המשיק לפונקציה: $f(x) = \sin 2x$ בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{2}$.

(8) מצא את משוואת המשיק לפונקציה: $f(x) = \tan 3x$ בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{9}$.

(9) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה: $f(x) = 4\sin^2 x$ בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y = 1$ בתחום $[0, \pi]$.

(10) שיפוע המשיק לפונקציה: $f(x) = \sqrt{\sin x + a}$, a (פרמטר) בנקודה שבה $y = 1$

בתחום $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ הוא $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

מצא את ערך הפרמטר a .

(11) נתונה הפונקציה: $f(x) = a\sin^2 x - 5\sin x + ax$, a (פרמטר) בתחום: $0 \leq x \leq \pi$.

ידוע כי הישר: $y = ax - 2$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{6}$.

א. מצא את a וכתוב את הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא נקודה על גרף הפונקציה בתחום הנתון שבה שיפוע המשיק הוא: $m = 2$.

ג. האם קיימות נקודות נוספות בתחום הנתון ששיפוע המשיק דרכן הוא 2? נמק את תשובתך.

ד. כתוב את משוואת המשיק העובר דרך הנקודה שמצאת.

(12) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = x^2 + \cos^2 x$, $g(x) = x^2 + \sin^2 x$.

א. הוכח כי ההפרש: $f(x) - g(x)$ שווה ל- $\cos 2x$.

ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות בתחום: $-\pi < x < \pi$.

ג. ישר $x = t$, $(0 < t < 1)$ חותך את הגרפים בנקודות A ו-B ומהן מעבירים משיקים

לפונקציות. ידוע כי ההפרש בין שיפוע המשיק של גרף הפונקציה $g(x)$ לשיפוע

המשיק של גרף הפונקציה $f(x)$ הוא 1.

מצא את כל הערכים האפשריים עבור t .

תשובות סופיות:

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (6)$$

$$y = -2x + \pi \quad (7)$$

$$y = 12x - \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3} \quad (8)$$

$$y = 2\sqrt{3}x - \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + 1, y = -2\sqrt{3}x + \frac{5\pi\sqrt{3}}{3} + 1 \quad (9)$$

$$a = \frac{1}{2} \quad (10)$$

$$f(x) = 2\sin^2 x - 5\sin x + 2x, a = 2. \text{ א. } \left(\frac{\pi}{2}, \pi - 3\right). \text{ ב. } \left(\frac{\pi}{2}, \pi - 3\right). \text{ ג. לא. } y = 2x - 3. \text{ ד. } \quad (11)$$

$$\left(-\frac{3\pi}{4}, 6.05\right), \left(-\frac{\pi}{4}, 1.11\right), \left(\frac{3\pi}{4}, 6.05\right), \left(\frac{\pi}{4}, 1.11\right). \text{ ב. } \left(\frac{\pi}{4}, 1.11\right). \text{ ג. } t = \frac{\pi}{12}. \quad (12)$$

מציאת תחום ההגדרה של פונקציות טריגונומטריות:

שאלות:

13 מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות בתחום הנתון:

$$\begin{array}{ll} \text{א. } f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos 2x}, [0, 2\pi] & \text{ב. } f(x) = \frac{1}{\sin x - \cos x}, [-\pi, \pi] \\ \text{ג. } f(x) = \tan x, [0, 2\pi] & \end{array}$$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{ll} \text{13 א. } 0 \leq x \leq 2\pi \text{ וגם } x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} & \text{ב. } -\pi \leq x \leq \pi \text{ וגם } x \neq \frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4} \\ \text{ג. } 0 \leq x \leq 2\pi \text{ וגם } x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} & \end{array}$$

מציאת נקודות קיצון:

שאלות:

14 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = \sin x + \cos x$ בתחום: $[0, 2\pi]$.

15 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = \sin x - \frac{x}{2}$ בתחום: $[0, 2\pi]$.

16 מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה: $f(x) = \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}$ בתחום: $[0, 2\pi]$.

17 מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{1}{3}\sin^3 x - 2\sin x$ בתחום: $[0, 1.5\pi]$.

18 לפונקציה: $f(x) = a\sin x + b\sin^3 x$ (פרמטרים) יש נקודת קיצון ששיעוריה $\left(\frac{7\pi}{6}, -1\right)$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

תשובות סופיות:

14 $\max(2\pi, 1)$ קצה, $\min\left(\frac{5}{4}\pi, -\sqrt{2}\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ קצה, $\min(0, 1)$ קצה.

15 $\max(2\pi, -\pi)$ קצה, $\min\left(\frac{5}{3}\pi, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{6}\pi\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$ קצה, $\min(0, 0)$ קצה.

16 $\max\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right)$ מוחלט, $\min(2\pi, -1)$ קצה, $(0, -1)$ קצה, $\max\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right)$ מוחלט.

17 $\max\left(\frac{3}{2}\pi, 2\frac{2}{15}\right)$, $\min\left(\frac{\pi}{2}, -2\frac{2}{15}\right)$

18 $b = -4$, $a = 3$

מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים:

שאלות:

(19) מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sin 3x}$ בתחום: $[0, \pi]$.

(20) מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}$ בתחום: $[0, \pi]$.

(21) מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה: $f(x) = \tan x$ בתחום: $[-\pi, \pi]$.

תשובות סופיות:

(19) $x = 0, x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{3}, x = \pi$

(20) $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$

(21) $x = \frac{\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{2}$

מציאת נקודות פיתול ותחומי קעירות:

שאלות:

(22) מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה של הפונקציה: $f(x) = \sin^2 x - 2\sin x$ בתחום: $[0, 2\pi]$.

תשובות סופיות:

(22) נקודות פיתול: $\left(\frac{7}{6}\pi, 1\frac{1}{4}\right), \left(\frac{11}{6}\pi, 1\frac{1}{4}\right)$, קעור מעלה: $\frac{7}{6}\pi < x < \frac{11}{6}\pi$, קעור מטה: $0 < x < \frac{7}{6}\pi$.

חקירת פונקציה טריגונומטרית:

שאלות:

(23) נתונה הפונקציה: $f(x) = x + 2\cos x$ בתחום $[0, 2\pi]$.

חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- מציאת נקודות פיתול.
- מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של הפונקציה.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(24) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$ בתחום $[0, \pi]$.

חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון.
- מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(25) נתונה הפונקציה: $f(x) = 4\sin 2x - 2$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מעבירים את הישר $y = k$ היעזר בסקיצה ומצא לאילו ערכי k הישר יחתוך את גרף הפונקציה בשתי נקודות בדיוק.
- העבירו ישר המשיק לפונקציה בנקודת המקסימום המוחלט שלה. כמו כן העבירו מנקודה זו אנך לציר x .
- מצא את שטח המלבן הנוצר על ידי הצירים, המשיק והאנך.

(26) נתונה הפונקציה: $f(x) = \cos^2 x - \cos x - 2$ בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(27) נתונה הפונקציה: $f(x) = \cos x + \frac{1}{m} \sin mx$, $1 < m < 3$, (m פרמטר).

הנגזרת של הפונקציה מתאפסת כאשר: $x = -\frac{\pi}{2}$.

- מצא את ערך הפרמטר m .
- האם הנקודה שבה: $x = -\frac{\pi}{2}$ היא נקודת קיצון? אם כן קבע את סוגה.
אם לא נמק מדוע.
- מצא כמה נקודות קיצון מקומיות יש לגרף הפונקציה בתחום: $0 < x < 2\pi$.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון.

(28) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \cos x \cdot (\sin x + 1)$ בתחום: $0 \leq x \leq 1.5\pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- כמה פתרונות יש למשוואה: $\cos x \cdot (\sin x + 1) = 1$ בתחום הנתון?

(29) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$.

- מצא בתחום $[0, \pi]$ את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה ואת נקודות הקיצון שלה.
- הוכח שהפונקציה זוגית.
- שרטט את הפונקציה בתחום $[-\pi, \pi]$.

(30) נתונה הפונקציה: $f(x) = 4x - 3\tan x$ בתחום $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
- מציאת אסימפטוטות אנכיות.
- מציאת נקודות פיתול.
- מציאת תחומי קעירות כלפי מעלה ומטה.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(31) נתונה הפונקציה: $f(x) = \tan 2x - 8\sin 2x$ בתחום: $-0.25\pi < x < 0.25\pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
- כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה בתחום הנתון.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

(32) נתונה הפונקציה: $f(x) = \tan(x^2 - 4x)$ בתחום $[0, 4]$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(33) נתונה הפונקציה: $f(x) = x \cos x - x$ בתחום: $-3\pi \leq x \leq 3\pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- ענה על הסעיפים הבאים:

i. הראה כי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x הנגזרת של הפונקציה מתאפסת.

ii. ידוע גם כי: $f'(3.67) = 0$, $f'(-3.67) = 0$ וכי אין נקודות נוספות בתחום הנתון שבהן הנגזרת מתאפסת. קבע אלו נקודות, מבין נקודות החיתוך שמצאת, הן נקודות קיצון ואלו אינן נקודות קיצון. מצא את סוג הקיצון בכל מקרה.

(34) נתונה הפונקציה: $y = (\cos x + k)^2$, k פרמטר, בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.

הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x = \frac{2\pi}{3}$.

- א. מצא את k וכתוב את הפונקציה.
- ב. מצא את נקודת המקסימום שאיננה מוחלטת בתחום הנתון.
- ג. האם יש לגרף הפונקציה נקודות מינימום שאינן מוחלטות? אם כן מהן?

(35) נתונה הפונקציה: $f(x) = m \sin x + k \cos^2 x$, (m פרמטר).

מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \pi$ שמשוואתו: $y = -6x + 6\pi + \sqrt{7}$.

- א. מצא את ערכי הפרמטרים k ו- m .
- ב. מצא את נקודות הקיצון בתחום: $-0.5\pi \leq x \leq 1.5\pi$.
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה וקבע עפ"י הסקיצה בכמה נקודות גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בתחום הנ"ל.

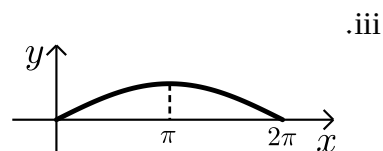
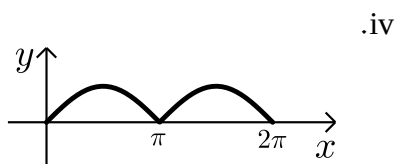
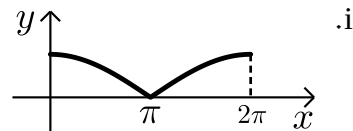
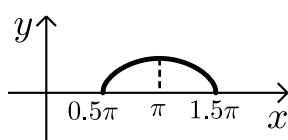
(36) נתונה הפונקציה: $f(x) = \tan x + kx$, (k פרמטר) בתחום: $0 \leq x \leq \pi$.

- א. מצא את האסימפטוטה האנכית של הפונקציה בתחום הנתון.
- הפונקציה: $g(x) = \tan^2 x + kx$ חותכת את הפונקציה $f(x)$ בשתי נקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x בתחום הנתון.
- ב. מצא את ערך הפרמטר k , ($k \neq 0$).
- ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון וקבע את סוגן.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

37) לפניך הפונקציות הבאות: $f(x) = \sqrt{-\cos x}$, $g(x) = \sqrt{\cos x + 1}$.

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0.5\pi \leq x \leq 1.5\pi$ והפונקציה $g(x)$ מוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

- האם הגרפים חותכים את ציר ה- x בתחום הנתון? הראה חישוב מתאים.
- האם הגרפים חותכים זה את זה בתחום הנתון? אם כן מצא את נקודות החיתוך.
- מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון וקבע את סוגה.
- לפניך ארבעה איורים: i, ii, iii, iv. קבע על סמך הסעיפים הקודמים איזה איור מתאר את הגרף של $f(x)$ ואיזה מתאר את הגרף של $g(x)$. נמק.



תשובות סופיות:

(23) א. $0 \leq x \leq 2\pi$.

ב. $\max(2\pi, 2\pi+2)$ קצה, $\min\left(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right)$, $\min(0, 2)$ קצה.

ג. תחומי עלייה: $\frac{5\pi}{6} < x < 2\pi$ או $0 < x < \frac{\pi}{6}$, תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$.

ד. $(0, 2)$. ה. אין. ו. $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$, קעירות כלפי מטה: $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ או $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

(24) א. $0 < x < \frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. ב. $\min\left(\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right)$.

ג. תחומי עלייה: $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$, תחומי ירידה: $0 < x < \frac{\pi}{4}$.

ד. $\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right)$. ה. אנכית: $x = \pi$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$.

(25) א. $\left(\frac{5}{12}\pi, 0\right), \left(\frac{\pi}{12}, 0\right), (0, -2)$.

ב. $\max(\pi, -2), \min\left(\frac{3\pi}{4}, -6\right), \max\left(\frac{\pi}{4}, 2\right), \min(0, -2)$.

ד. $-6 < k < 2$ וגם $k \neq -2$. ה. $\frac{\pi}{2}$.

(26) א. $(\pi, 0), (0, -2)$.

ב. $\max(2\pi, -2), \min\left(1\frac{2}{3}\pi, -2.25\right), \max(\pi, 0), \min\left(\frac{\pi}{3}, -2.25\right), \max(0, -2)$.

ג. עולה: $\frac{1}{3}\pi < x < \pi$, $1\frac{2}{3}\pi < x < 2\pi$, יורדת: $\pi < x < 1\frac{2}{3}\pi$, $0 < x < \frac{\pi}{3}$.

(27) א. $m = 2$. ב. נקודת פיתול. ג. 2 נקודות.

ד. $(0.5\pi, 0), (1.5\pi, 0)$.

(28) א. $(0, 1), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$. ב. $(1.5\pi, 0), \left(\frac{5}{6}\pi, -1.29\right), \left(\frac{\pi}{6}, 1.29\right), (0, 1)$.

ד. 2 פתרונות.

(29) א. חיתוך: $(0, 0), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, קיצון: $\min(\pi, -2)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4}\right)$ קצה, $\min(0, 0)$ קצה.

$$(30) \text{ א. } -\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \text{ וגם } x \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ב. } \min\left(-\frac{\pi}{6}, -0.36\right), \max\left(\frac{\pi}{6}, 0.36\right) \text{ קצה}$$

$$\text{ג. תחומי עלייה: } -\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6}, \text{ תחומי ירידה: } \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \text{ וגם } x \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ד. } (0,0) \quad \text{ה. אנכית: } x = \frac{\pi}{2} \quad \text{ו. } (0,0)$$

$$\text{ז. קעירות כלפי מעלה: } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \text{ או } -\frac{\pi}{6} \leq x \leq 0, \text{ קעירות כלפי מטה: } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$(31) \text{ א. } (0,0), (\pm 0.23\pi, 0) \quad \text{ב. } x = \pm 0.25\pi \quad \text{ג. } \min\left(\frac{\pi}{6}, -\sqrt{27}\right), \max\left(-\frac{\pi}{6}, \sqrt{27}\right)$$

$$(32) \text{ א. } 0 \leq x \leq 4 \text{ וגם } x \neq 0.44, x \neq 3.56$$

$$\text{ב. } \max(0,0), \min(2, -1.16), \max(4,0) \text{ קצה.}$$

$$(33) \text{ א. } (0,0), (2\pi,0), (-2\pi,0)$$

$$\text{ב. ii. } \max(2\pi,0), \min(-2\pi,0), (0,0) \text{ פיתול.}$$

$$(34) \text{ א. } y = (\cos x + 0.5)^2, k = 0.5 \quad \text{ב. } (\pi, 0.25) \quad \text{ג. לא.}$$

$$(35) \text{ א. } m = 6, k = \sqrt{7} \quad \text{ב. } (-0.5\pi, -6), (0.5\pi, 6), (1.5\pi, -6) \quad \text{ג. בשתי נקודות.}$$

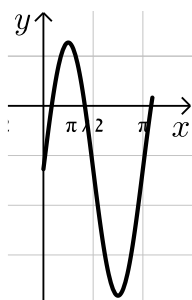
$$(36) \text{ א. } x = 0.5\pi \quad \text{ב. } k = -\frac{4}{\pi} \approx -1.27$$

$$\text{ג. } \max(0,0), \min(0.15\pi, -0.07), \max(0.84\pi, -3.9), \min(\pi, -4)$$

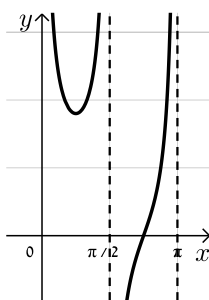
$$(37) \text{ א. כן. } f(x): (0.5\pi, 0), (1.5\pi, 0), g(x): (\pi, 0) \quad \text{ב. כן, } \left(\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{4}{3}\pi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\text{ג. } \max(0.5\pi, 0), \min(1.5\pi, 0), \max(\pi, 1) \quad \text{ד. איור I - } g(x), \text{ איור II - } f(x)$$

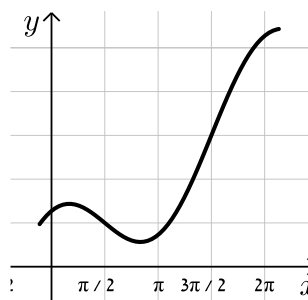
סקיצות לשאלות החקירה:



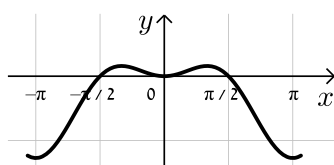
(25)



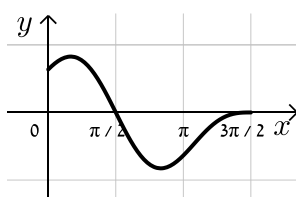
(24)



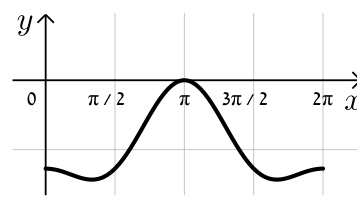
(23)



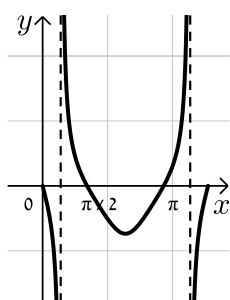
(29)



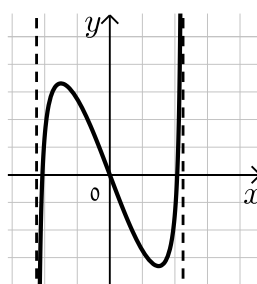
(28)



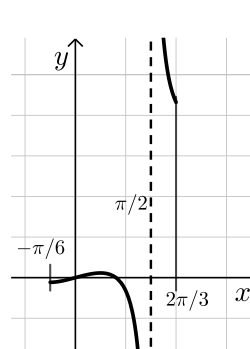
(26)



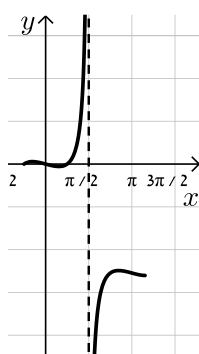
(32)



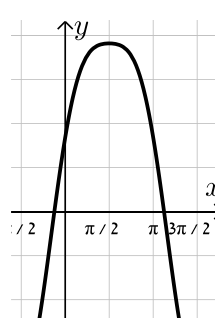
(31)



(30)



(36)



(35)

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי א

פרק 17 - חשבון דיפרנציאלי - פונקציות מעריכיות - חזרה

תוכן העניינים

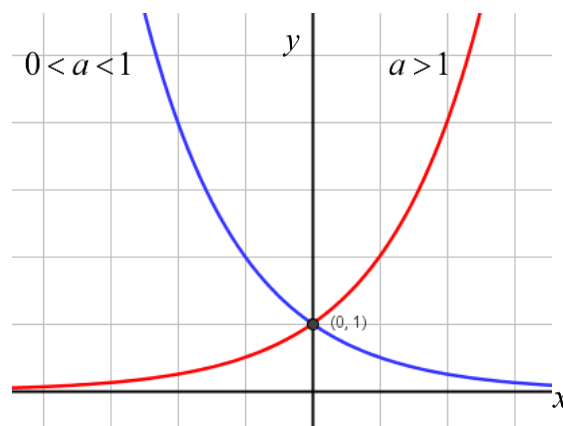
- 1. הנגזרת של פונקציה מעריכית 241
- 2. שימושי הנגזרת 245
- 3. חקירה של פונקציה מעריכית 246

הנגזרת של פונקציה מעריכית:

סיכום כללי:

הגדרות כלליות:

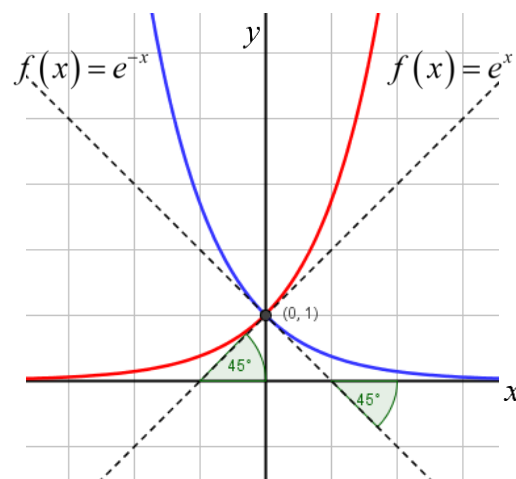
להלן תיאורים גרפיים של פונקציה מעריכית כללית מהצורה: $f(x) = a^x$
 עבור: $a > 1$ ו- $0 < a < 1$:



תכונות כלליות:

1. הפונקציות מוגדרות לכל x .
2. הפונקציות תמיד חיוביות.
3. הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- y בנקודה: $(0, 1)$.
4. עבור: $a > 1$ הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור: $0 < a < 1$ הפונקציה יורדת בכל ת.ה.

עבור הפונקציות $f(x) = e^x$ ו- $f(x) = e^{-x}$ נקבל:



תכונות נוספות:

1. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = e^x$ בנקודת החיתוך עם ציר ה- y הוא 1.
2. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = e^{-x}$ בנקודת החיתוך עם ציר ה- y הוא -1.

נגזרות של פונקציות מעריכיות:

הפונקציה	הנגזרת
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
$y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

תזכורת - כללי הגזירה:

מספר כלל	הפונקציה	תיאור	הנגזרת
1.	$y = a \cdot f(x)$	מכפלה בקבוע	$y' = a \cdot f'(x)$
2.	$y = f(x) + g(x)$	סכום פונקציות	$y' = f'(x) + g'(x)$
3.	$y = f(x) \cdot g(x)$	מכפלת פונקציות	$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4.	$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	מנת פונקציות	$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
5.	$y = f(g(x))$	פונקציה מורכבת	$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

שאלות:

(1) גזור את הפונקציות הבאות (סכום פונקציות):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } f(x) = 3e^x + e^{2x} + e^{-x} + 2x + 1 & \text{ב. } f(x) = e^{x^2-3x} + ex \\ \text{ג. } f(x) = 2^{3x} & \text{ד. } f(x) = 3^{x^2} + 4^{-x} \end{array}$$

(2) גזור את הפונקציות הבאות (מכפלת פונקציות):

$$\text{א. } f(x) = x \cdot e^x \quad \text{ב. } f(x) = x^2 \cdot e^{4x} \quad \text{ג. } f(x) = (x+1) \cdot 2^x$$

(3) גזור את הפונקציות הבאות (מנת פונקציות):

$$\text{א. } f(x) = \frac{x^2}{e^x} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

(4) גזור את הפונקציות הבאות (פונקציה מורכבת):

$$\text{א. } f(x) = 5(e^{2x} - 1)^3 \quad \text{ב. } f(x) = \sqrt{e^{2x} + e^{-2x}} \quad \text{ג. } f(x) = \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^x + 1}}$$

(5) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות שונות):

$$\begin{array}{ll} \text{א. } f(x) = e^{2x} & \text{ב. } f(x) = e^x + 1 \\ \text{ג. } f(x) = e^{\frac{1}{x}} & \text{ד. } f(x) = (x^2 + 1)e^x \\ \text{ה. } f(x) = e^{-x}(x^2 + 4x + 1) & \text{ו. } f(x) = e^{3x-2} \\ \text{ז. } f(x) = e^x \cdot \frac{1}{x} & \text{ח. } f(x) = x^3 e^{2x} \\ \text{ט. } f(x) = e^{-2x}(x+4) & \text{י. } f(x) = e^{2x+1}(1-x) \\ \text{יא. } f(x) = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} & \text{יב. } f(x) = \frac{x^3}{e^{3x}} \\ \text{יג. } f(x) = \frac{2+x^2}{e^{x^2}} & \text{יד. } f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^{-x} + e^x} \\ \text{טו. } f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^{-x}} & \text{טז. } f(x) = \frac{e^x}{1 - e^{x+1}} \end{array}$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } 3e^x + 2e^{2x} - e^{-x} + 2 \quad \text{ב. } (2x-3)e^{x^2-3x} + e \quad \text{ג. } 3\ln 2 \cdot 2^{3x} \quad \text{ד. } 2x \ln 3 \cdot 3^{x^2} - \ln 4 \cdot 4^{-x}$$

$$(2) \quad \text{א. } (1+x)e^x \quad \text{ב. } 2xe^{4x}(1+2x) \quad \text{ג. } 2^x(1+x\ln 2 + \ln 2)$$

$$(3) \quad \text{א. } \frac{x(2-x)}{e^x} \quad \text{ב. } \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$(4) \quad \text{א. } 30e^{2x}(e^{2x}-1)^2 \quad \text{ב. } \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}}} \quad \text{ג. } \frac{5e^{4x}+6e^{3x}}{2\sqrt{(e^x+1)^3}}$$

$$(5) \quad \text{א. } 2e^{2x} \quad \text{ב. } e^x \quad \text{ג. } -\frac{e^{1/x}}{x^2} \quad \text{ד. } (x+1)^2 e^x$$

$$\text{ה. } e^{-x}(-x^2-2x+3) \quad \text{ו. } 3e^{3x-2}$$

$$\text{ז. } \frac{e^x(x-1)}{x^2} \quad \text{ח. } x^2 e^{2x}(3+2x) \quad \text{ט. } -e^{-2x}(2x+7)$$

$$\text{י. } e^{2x+1}(1-2x)$$

$$\text{יא. } \frac{e^{-1/x}}{x^2} \quad \text{יב. } \frac{3x^2(1-x)}{e^{3x}} \quad \text{יג. } \frac{-2x(x^2+1)}{e^{x^2}}$$

$$\text{יד. } \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2} \quad \text{טו. } \frac{(x+1)^2}{e^{-x}} \quad \text{טז. } \frac{e^x}{(1-e^{x+1})^2}$$

שימושי הנגזרת:

שאלות:

- (6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = e^x$ בנקודה $A(1, e)$.
- (7) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = e^{2x} + xe^{-x}$ בנקודה שבה $x = 0$.
- (8) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = (e+1)e^x - e^{2x}$ בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y = e$.
- (9) נתונה הפונקציה: $y = e^{2x} + 3ex$.
 לפונקציה העבירו משיק דרך הנקודה שבה: $x = 2$.
 מצא את משוואת המשיק.
- (10) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = a \cdot 3^{2x-1} + 3^{x-b}$ בנקודה $(1, 15)$ הוא $21 \ln 3$.
 מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

תשובות סופיות:

- (6) $y = ex$
- (7) $y = 3x + 1$
- (8) $y = (-e^2 + e)x + e^2$, $y = (e-1)x + e$
- (9) $y = 2e^4x + 3ex - 3e^4$
- (10) $b = -1$, $a = 2$

חקירה של פונקציה מעריכית:

שאלות:

(11) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll}
 \text{א. } f(x) = \frac{2x-1}{e^x} & \text{ב. } f(x) = \frac{3}{e^x-1} & \text{ג. } f(x) = \frac{x+1}{e^x-5} \\
 \text{ד. } f(x) = \frac{1}{e^{2x}-3e^x+2} & \text{ה. } f(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^x} & \text{ו. } f(x) = \frac{\sqrt{e^x-1}}{5x-2} \\
 \text{ז. } f(x) = \sqrt{e^{2x}-4e^x+3}
 \end{array}$$

(12) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = x^2 e^x$.

(13) מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x}{x-2}$.

(14) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax^2+bx+9}{e^x}$.

הפונקציה משיקה לציר ה- x בנקודה שבה $x=1.5$.
מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת נקודות הקיצון של הפונקציה.

(15) נתונה הפונקציה: $f(x) = 8^x + p \cdot 2^x + q$. לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה $(\log_2 3, -19)$. מצא את ערכי הפרמטרים p ו- q .

(16) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = e^{2x} + e^x$.

(17) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x}}$.

(18) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x + 5}{e^x - 1}$.

(19) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x - 5}$.

(20) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

(21) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^{2x} - 5e^x + 6}$.

(22) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$.

(23) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x^3 - 1}{e^x}$.

(24) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x-1}{e^{3x} - e}$.

(25) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = (x-3)e^x$.

(26) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$.

(27) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 + a}{be^x}$. לפונקציה יש נקודת פיתול בנקודה $\left(1, \frac{2}{e}\right)$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת נקודת הפיתול השנייה של הפונקציה.

(28) חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים הבאים :

1. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
2. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
3. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
4. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

$$f(x) = (x^2 + 1)e^x \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = (x-1)e^x \quad \text{א.}$$

$$f(x) = e^{x^2-x} \quad \text{ד.}$$

$$f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{4}x^2} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^{x+1}} \quad \text{ו.}$$

$$f(x) = \frac{2}{e^{x^2} + 1} \quad \text{ה.}$$

(29) נתונה הפונקציה $f(x) = (x-3)e^x$. חקור על פי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(30) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{2x} - 8e^x + 6x + 10$. חקור על פי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(31) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{4x}{e^{0.5x^2}}$. חקור על פי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(32) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^3}{e^x}$. חקור על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(33) נתונה הפונקציה $f(x) = 2x \cdot 3^x$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(34) נתונה הפונקציה $f(x) = 2e^{\frac{x}{x^2+1}}$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ז. לאלו ערכי m יש למשוואה $f(x) = m$ בדיוק פתרון אחד?

(35) נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. מציאת נקודות פיתול של הפונקציה.
- ז. כתיבת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.

ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(36) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^{3x}}{12x^2 + 1}$.

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(37) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{e^{3x^2 + 6x + k}}$ בנקודה שבה $x = 1$ הוא $-\frac{12}{e^{10}}$.

- מצא את ערך הפרמטר k וכתוב את הפונקציה.
- מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- הוכח על סמך הסקיצה את אי-השוויון הבא: $0 < \frac{1}{e^{3x^2 + 6x + 1}} \leq e^2$.

(38) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = e^{2x} + ae^x + b$. גוזרים את הפונקציה פעמיים

וידוע כי כאשר $x = \ln \frac{2}{3}$ הנגזרות מקיימות: $f'(x) + f''(x) = 8$.

- מצא את a .
- משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת היא: $y = 16x + 7 - 16 \ln 2$.
- מצא את שיעור ה- x של נקודת ההשקה.
- מצא את b .
- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

(39) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = 6x - e^x$ ו- $g(x) = ae^x - e^{2x} + b$. ידוע כי לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה אותו שיעור x וכי שתיהן נפגשות על ציר ה- y .

- מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .
- הראה כי לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה משותפים.

(40) לגרף הפונקציה: $f(x) = ax^2 \cdot e^{-bx^2}$ יש נקודת קיצון: $\left(2, \frac{4}{e}\right)$, $a, b \neq 0$.

- מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b וכתוב את הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון הנוספות של הפונקציה וקבע את סוגן.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מעבירים ישר: $y = k$. באיזה תחום ערכים צריך להימצא k כדי שהישר יחתוך את גרף הפונקציה ב-4 נקודות שונות?

(41) לפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - 6x - 7}{e^{ax-1}}$ יש קיצון בנקודה שבה: $x = 1$.

- מצא את ערך הפרמטר a .
- האם יש לגרף הפונקציה נקודות קיצון נוספות? אם כן מצא אותן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(42) הישר $x = \sqrt{6}$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה: $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 + m}$.

- מצא את ערך הפרמטר m וכתוב את הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(43) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 \cdot e^{2x}$.

- מצא את הנקודות המקיימות: $f'(x) = 0$ וקבע כמה מהן הן נקודות קיצון.
- מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- בכמה נקודות חותך הישר $y = -0.01$ את גרף הפונקציה?

(44) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = e^{2x} + ae^x + b$. גוזרים את הפונקציה פעמיים

וידוע כי כאשר $x = \ln \frac{2}{3}$ הנגזרות מקיימות: $f'(x) + f''(x) = 12$.

א. מצא את a .

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת היא: $y = 22x + 28 - 22 \ln 2$.

ב. מצא את שיעור ה- x של נקודת ההשקה.

ג. מצא את b .

ד. האם הפונקציה חותכת את ציר ה- x ? אם כן מצא את הנקודות.

(45) נתונה הפונקציה: $f(x) = x \cdot a^x$, $(a > 0)$.

לפונקציה יש נקודת קיצון שבה: $x = -\frac{1}{\ln 2}$.

א. מצא את a .

ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

הנקודה שבה $x = 2$ היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$

עם גרף הפונקציה: $g(x) = x^2 \cdot 2^x - kx \cdot 2^x$.

ג. מצא את k .

ד. מצא נקודה נוספת שבה הגרפים נחתכים.

(46) נתונה הפונקציה: $f(x) = 3^{2x} + 2 \cdot 3^{1-x}$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה

עם ציר ה- y .

ב. הוכח כי גרף הפונקציה אינו חותך את ציר ה- x .

ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

תשובות סופיות:

$$(11) \quad \text{א. כל } x \quad \text{ב. } x \neq 0 \quad \text{ג. } x \neq \ln 5 \quad \text{ד. } x \neq \ln 2, x \neq 0 \quad \text{ה. כל } x$$

$$\text{ו. } 0 \leq x \neq \frac{2}{5} \quad \text{ז. } x \leq 0, x \geq \ln 3$$

$$(12) \quad \min(0,0), \max\left(-2, \frac{4}{e^2}\right)$$

$$(13) \quad \min(3, e^3)$$

$$(14) \quad \min(1.5, 0), \max(3.5, 0.483), b = -12, a = 4$$

$$(15) \quad p = -27, q = 35$$

$$(16) \quad y = 0$$

$$(17) \quad y = 0$$

$$(18) \quad x = 0, y = -5, y = 1$$

$$(19) \quad x = \ln 5, y = -\frac{1}{5}$$

$$(20) \quad y = -1, y = 1$$

$$(21) \quad (\ln 2, -1) \text{ נקודת אי הגדרה: } x = \ln 3, y = -\frac{1}{3}, y = 0$$

$$(22) \quad x = 0, y = 0$$

$$(23) \quad y = 0$$

$$(24) \quad x = \frac{1}{3}, y = 0$$

$$(25) \quad y = 0$$

$$(26) \quad (0,0) \text{ נקודת אי הגדרה: } x = 0$$

$$(27) \quad \left(3, \frac{10}{e^3}\right), a = 1, b = 1$$

$$(28) \quad \text{א. כל } x \quad \text{ב. } (0, -1), (1, 0) \quad \text{ג. } \min(0, -1) \quad \text{ד. עולה: } x > 0 \text{ יורדת: } x < 0$$

$$\text{ב. כל } x \quad \text{ג. } (0, 1) \quad \text{ד. עולה: } x < -1, x > -1 \quad \text{פיתול } \left(-1, \frac{2}{e}\right)$$

$$\text{ג. כל } x \quad \text{ד. } (0, 0) \quad \text{ה. } \max\left(2, \frac{4}{e}\right), \min(0, 0), \max\left(-2, \frac{4}{e}\right)$$

$$\text{ה. עולה: } x < -2, 0 < x < 2 \text{ יורדת: } x > 2, -2 < x < 0$$

$$\text{ד. כל } x \quad \text{ה. } (0, 1) \quad \text{ו. } \min(0.5, e^{-0.25}) \quad \text{ז. עולה: } x > 0.5 \text{ יורדת: } x < 0.5$$

- ה.1. כל x 2. $(0,1)$ 3. $\max(0,1)$ 4. עולה: $x < 0$ יורדת: $x > 0$
- ו.1. כל x 2. $(0, 2e^{-1})$ 3. $\min(0, 2e^{-1})$ 4. עולה: $x > 0$ יורדת: $x < 0$
- (29) א. כל x ב. $\min(2, -e^2)$ ג. תחומי עלייה: $x > 2$ תחומי ירידה: $x < 2$
- ד. $(3,0)$, $(0,-3)$
- (30) א. כל x ב. $\max(0,3)$, $\min(\ln 3, 1.59)$ ג. תחומי עלייה: $x > \ln 3$ או $x < 0$ תחומי ירידה: $0 < x < \ln 3$ ד. $(0,3)$
- (31) א. כל x ב. $\min\left(-1, -\frac{4}{e^{0.5}}\right)$, $\max\left(1, \frac{4}{e^{0.5}}\right)$ ג. תחומי עלייה: $-1 < x < 1$ תחומי ירידה: $x > 1$ או $x < -1$ ד. $(0,0)$
- (32) א. כל x ב. $\max\left(3, \frac{27}{e^3}\right)$ ג. עולה: $x < 3$, יורדת: $x > 3$ ד. $(0,0)$
- (33) א. כל x ב. $\min(-0.91, -0.67)$ ג. עולה: $x > -0.91$ יורדת: $x < -0.91$ ד. $(0,0)$
- (34) א. כל x ב. $\max(1, 2\sqrt{e})$, $\min\left(-1, \frac{2}{\sqrt{e}}\right)$ ג. עולה: $-1 < x < 1$ יורדת: $x < -1$, $x > 1$
- ז. $m = 2$, $m = 2\sqrt{e}$, $m = \frac{2}{\sqrt{e}}$ ח. $y = 2$ ד. $(0,2)$ א. $x \neq 0$ ב. $\min\left(\frac{1}{2}, \frac{e^2}{4}\right)$ ג. עולה: $x > \frac{1}{2}$, יורדת: $x < \frac{1}{2}$ ד. אין
- (35) א. כל x ב. $\max\left(\frac{1}{6}, \frac{3\sqrt{e}}{4}\right)$, $\min\left(\frac{1}{2}, \frac{e^{1.5}}{4}\right)$ ג. עולה: $x > \frac{1}{2}$, $x < \frac{1}{6}$ יורדת: $x > \frac{1}{6}$, $x < \frac{1}{2}$ ד. אין
- (36) א. כל x ב. $\max\left(\frac{1}{6}, \frac{3\sqrt{e}}{4}\right)$, $\min\left(\frac{1}{2}, \frac{e^{1.5}}{4}\right)$ ג. עולה: $x > \frac{1}{2}$, $x < \frac{1}{6}$ יורדת: $x > \frac{1}{6}$, $x < \frac{1}{2}$ ד. $(0,1)$ א. $\frac{1}{6} < x < \frac{1}{2}$
- (37) א. $k=1$, $f(x) = \frac{1}{e^{3x^2+6x+1}}$ ב. $(-1, e^2)$ ד. ניתן לראות עפ"י הגרף כי ערך הפונקציה $f(x)$ נמצא בתחום $0 < f(x) \leq e^2$
- (38) א. $a=4$ ב. $x = \ln 2$ ג. $b = -5$ ד. $(0,0)$
- (39) א. $a=12$, $b=-12$ ב. עולות: $x < \ln 6$ יורדות: $x > \ln 6$

(40) א. $f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{4}x^2}$, $a=1$, $b=0.25$ ב. $\max\left(-2, \frac{4}{e}\right)$, $\min(0,0)$ ג.

ג. $(0,0)$ ה. $0 < k < \frac{4}{e}$

(41) א. $a = \frac{1}{3}$ ב. כן: $\left(11, \frac{48}{e^{\frac{2}{3}}}\right)$ ג. עולה: $1 < x < 11$ יורדת: $x < 1, x > 11$

ד. $(-1,0)$, $(7,0)$, $(0,-7e)$

(42) א. $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 - 6}$, $m = -6$ ב. $\max\left(-2, -\frac{1}{2e^4}\right)$, $\min\left(3, \frac{e^6}{3}\right)$ ג. $\left(0, -\frac{1}{6}\right)$

(43) א. $x = 0, -1.5$. נקודת הקיצון היא: $\min\left(-1.5, -3\frac{3}{8}e^{-3}\right)$ ב. $y = 0$

ד. 2 נקודות.

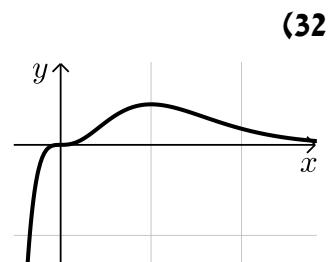
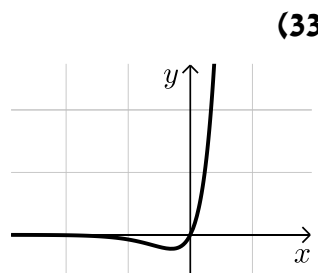
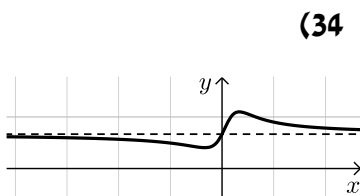
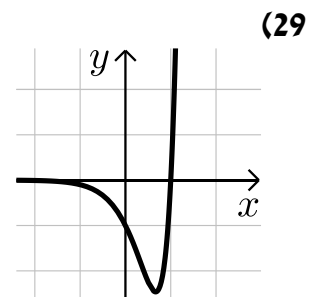
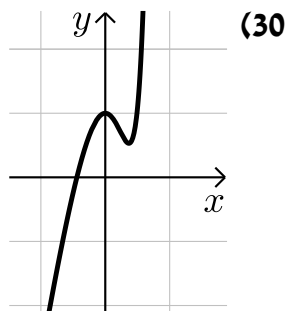
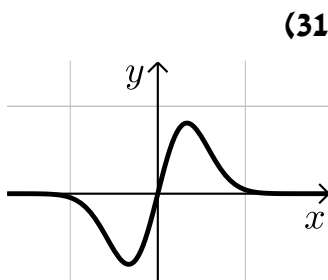
(44) א. $a = 7$ ב. $x = \ln 2$ ג. $b = 10$ ד. לא.

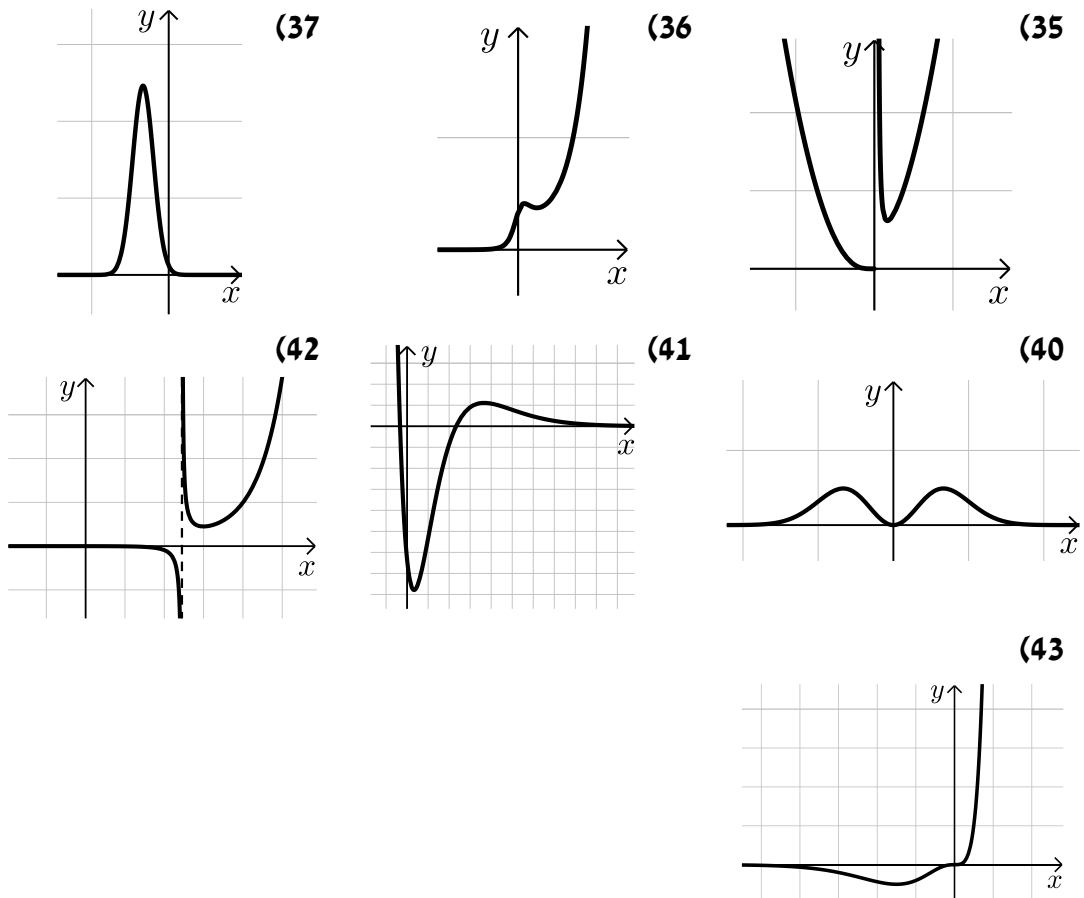
(45) א. $a = 2$ ב. עולה: $x > -\frac{1}{\ln 2}$ יורדת: $x < -\frac{1}{\ln 2}$ ג. $k = 1$

ד. $(0,0)$

(46) א. $y = -x \ln 81 + 7$ ג. $\min\left(\frac{1}{3}, \sqrt[3]{243}\right)$

סקיצות לשאלות החקירה:





חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי א

פרק 18 - חשבון דיפרנציאלי - פונקציות לוגריתמיות - חזרה

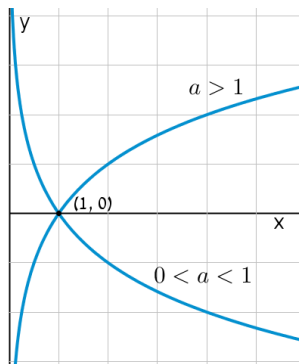
תוכן העניינים

1. הנגזרת של פונקציה לוגריתמית 257
2. שימושי הנגזרת 262
3. חקירה של פונקציה לוגריתמית 263

הנגזרת של פונקציה לוגריתמית:

סיכום כללי:

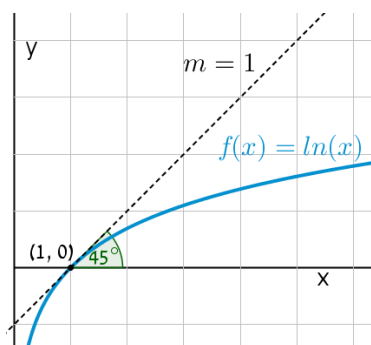
הגדרות כלליות:



להלן תיאורים גרפיים של פונקציה לוגריתמית כללית מהצורה: $f(x) = \log_a x$ עבור $a > 1$ ו- $0 < a < 1$:

תכונות כלליות:

- לפונקציות תחום הגדרה $x > 0$.
- הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- x בנקודה $(1, 0)$.
- עבור $a > 1$ הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור $0 < a < 1$ הפונקציה יורדת בכל ת.ה.



עבור הפונקציות $f(x) = \ln x = \log_e x$ נקבל כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x הוא 1:

תחום הגדרה של פונקציה לוגריתמית:

תחום ההגדרה של פונקציה לוגריתמית מהצורה: $y = \log(f(x))$ הוא: $f(x) > 0$.

נגזרות של פונקציות לוגריתמיות:

הפונקציה	הנגזרת
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
$y = \log_a f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x) \ln a}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \ln f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

שאלות:

(1) גזור את הפונקציות הבאות (גזירה לוגריתמית יסודית עם ביטויים פנימיים שונים):

א. $f(x) = 3 \ln x + 4 \ln(x+2) - \ln(5x-1)$ ב. $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$

ג. $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$ ד. $f(x) = \ln(e^x + 1)$

ה. $f(x) = \ln(\cos x)$ ו. $f(x) = \log_2 x + 5 \log_3(2x-1)$

(2) גזור את הפונקציות הבאות (מכפלה ומנה של פונקציות):

א. $f(x) = x \ln x$ ב. $f(x) = (3x+1)^2 \ln x$ ג. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

ד. $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2}$ ה. $f(x) = \sqrt{\ln x + x}$

(3) גזור את הפונקציות הבאות (פונקציות מורכבות):

א. $f(x) = \ln^3 x$ ב. $f(x) = 3 \ln^2 x$

ג. $f(x) = x^2 \ln^2 x$ ד. $f(x) = \frac{\ln^2 x + 1}{(\ln x + 1)^2}$

(4) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות שונות):

- | | |
|----------------------------------|-------------------------------------|
| א. $f(x) = \ln(x+2)$ | ב. $f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3$ |
| ג. $f(x) = x^2 \ln x$ | ד. $f(x) = x^3 \ln x$ |
| ה. $f(x) = \ln e^{2x}$ | ו. $f(x) = e^x \ln x$ |
| ז. $f(x) = e^{-x^2} \ln x$ | ח. $f(x) = x^2(2 \ln x - 1)$ |
| ט. $f(x) = \ln(x^2)$ | י. $f(x) = \ln(x^4)$ |
| יא. $f(x) = (\ln x)^4$ | יב. $f(x) = x \ln x - \ln x^2$ |
| יג. $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$ | יד. $f(x) = \ln \sqrt{x}$ |
| טו. $f(x) = \sqrt{\ln x}$ | טז. $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ |

(5) גזור את הפונקציות הבאות (שאלות אתגר):

- | | |
|--|--|
| א. $f(x) = \ln \frac{x+2}{x}$ | ב. $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$ |
| ג. $f(x) = \ln \frac{x-3}{x+3}$ | ד. $f(x) = \ln \frac{(x-5)^3}{(x+1)^2}$ |
| ה. $f(x) = \ln \sqrt{x^2 - 1}$ | ו. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$ |
| ז. $f(x) = e^{\sqrt{\ln x}}$ | ח. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}}$ |
| ט. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ | י. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+5x}{1-5x}}$ |
| יא. $f(x) = \frac{\ln \sqrt[3]{x}}{x}$ | יב. $f(x) = \frac{(\ln x)^3}{x}$ |
| יג. $f(x) = \frac{x}{\ln(x^2)}$ | יד. $f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x}$ |
| טו. $f(x) = \frac{x}{\ln^4 x}$ | |

תשובות סופיות:

(1) $f'(x) = \frac{3}{x} + \frac{4}{x+2} - \frac{5}{5x-1}$ א. $f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x}$ ב. $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)(x+1)}$ ג.

$f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ ד. $f'(x) = -\tan x$ ה. $f'(x) = \frac{1}{x \ln 2} + \frac{10}{(2x-1) \ln 3}$ ו.

(2) $f'(x) = \ln x + 1$ א. $f'(x) = (3x+1) \left(6 \ln x + \frac{3x+1}{x} \right)$ ב. $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ ג.

$f'(x) = \frac{4}{x(\ln x+2)^2}$ ד. $f'(x) = \frac{1+x}{2x\sqrt{\ln x+x}}$ ה.

(3) $f'(x) = \frac{3 \ln^2 x}{x}$ א. $f'(x) = \frac{6 \ln x}{x}$ ב. $f'(x) = 2x \ln x (\ln x + 1)$ ג.

$f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{x(\ln x + 1)^3}$ ד.

(4) $\frac{1}{x+2}$ א. $\frac{2 \ln x + 2}{x}$ ב. $x(2 \ln x + 1)$ ג.

$x^2(3 \ln x + 1)$ ד. $e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right)$ ה. 2. $\frac{4}{x}$ ו. $\frac{2}{x}$ ז.

$e^{-x^2} \left(\frac{1}{x} - 2x \ln x \right)$ ח. $4x \ln x$ ט. $\frac{2 \ln x - \ln^2 x}{x^2}$ יג.

$\frac{4(\ln x)^3}{x}$ יא. $\ln x + 1 - \frac{2}{x}$ יב. $\frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$ יד.

$\frac{1}{2x}$ יז. $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$ יט. $\frac{6}{x^2-9}$ ג.

(5) $-\frac{2}{x(x+2)}$ א. $\frac{2}{x^2-1}$ ב. $\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{x\sqrt{x^2+a^2}+x^2+a^2}$ ג.

$\frac{3}{x-5} - \frac{2}{x+1}$ ד. $\frac{x}{x^2-1}$ ה. $\frac{1}{x^2-1}$ ט.

$\frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}$ ו. $\frac{1}{4-2x}$ ח.

$$\text{י.ב.} \quad \frac{3\ln^2 x - \ln^3 x}{x^2}$$

$$\text{ט.ו.} \quad \frac{\ln x - 4}{\ln^5 x}$$

$$\text{י.א.} \quad \frac{1 - 3\ln \sqrt[3]{x}}{3x^2}$$

$$\text{י.ד.} \quad \frac{2(\ln^4 x - 1)}{x \ln^3 x}$$

$$\text{י.} \quad \frac{5}{1 - 25x^2}$$

$$\text{י.ג.} \quad \frac{\ln(x^2) - 2}{\ln^2(x^2)}$$

שימושי הנגזרת:

שאלות:

(6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \ln x$ בנקודה $A(e, 1)$.

(7) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{\ln^2 x + a}{\ln x + b}$ בנקודה $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$ הוא $\frac{e}{3}$.
מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

(8) הגרפים של הפונקציות $f(x) = \ln x$ ו- $g(x) = 1 - f(x)$ נחתכים בנקודה A ברביע הראשון.
בנקודה A העבירו משיק ל- $f(x)$.
מצא את משוואת המשיק והוכח שמשיק זה עובר דרך הראשית.

(9) לפונקציה $g(x) = \frac{\ln x^2}{x}$ העבירו משיק בנקודה שבה $x = e^2$.
מצא את משוואת המשיק.

(10) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y = x \ln(x^2 + 1)$ בנקודה שבה $x = 1$.

תשובות סופיות:

$$(6) \quad y = \frac{1}{e}x$$

$$(7) \quad a = 2, b = -2$$

$$(8) \quad y = \frac{1}{e}x$$

$$(9) \quad y = -\frac{2}{e^4}x + \frac{6}{e^2}$$

$$(10) \quad y = \ln 2 \cdot x + x - 1$$

חקירה של פונקציה לוגריתמית:

שאלות:

11 מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \ln x$	ב. $f(x) = \ln(x^2)$
ג. $f(x) = \log_3(x^2 - 8x - 20)$	ד. $f(x) = \ln(e^x - 4)$
ה. $f(x) = \frac{x-1}{\ln x - 1}$	ו. $f(x) = \frac{1}{\ln^2 x - 2 \ln x - 3}$
ז. $f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$	

12 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = 2 \ln x - x^2$.

13 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = x^2 \ln x$.

14 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\sqrt{2 \ln x - 1}}{x}$.

15 מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$.

16 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{a \ln x + b}{x}$. הנקודה $\left(e^2, \frac{1}{e^2}\right)$ היא נקודת קיצון של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

17 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{a \ln^2 x + b \ln x}{(\ln x + 1)^2}$. הנקודה $\left(\sqrt[3]{e}, -\frac{1}{8}\right)$ היא נקודת קיצון של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

18 מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \ln(x-3)$.

19 מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{1}{\ln x - 1}$.

(20) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{2 \ln x - 1}{\ln x + 1}$.

(21) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln^2 x - 4}$.

(22) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

(23) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\ln^2 x + 1}$.

(24) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = x \ln x + 2$.

(25) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. מצא את נקודת הפיתול של הפונקציה.

(26) חקור את הפונקציות הבאות עפ"י הסעיפים הבאים:

- i. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ii. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- iii. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- iv. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

א. $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3 \ln x$	ב. $y = x \ln x$
ג. $y = x \ln x - x$	ד. $y = \sqrt{x} \ln x$
ה. $y = x^2 \ln x$	ו. $y = \ln(x^2 + 1)$

(27) נתונה הפונקציה $f(x) = 2x \ln^2 x$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(28) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\ln x - 1}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- תחום הגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מצא לאלו ערכי k הישר $y = k$ חותך את הפונקציה בשתי נקודות.

(29) נתונה הפונקציה $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- תחום הגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(30) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{\ln x}$.

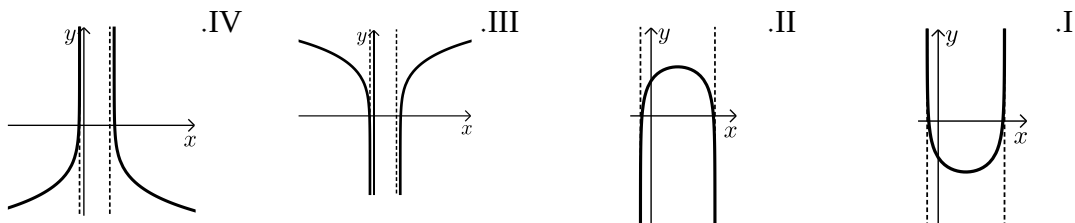
- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- הוכח כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.
- מגדירים פונקציה נוספת: $g(x) = \ln x$.
- מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.
- הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$. ידוע כי לנקודות A ו-B אותו שיעור x , $(x_A = x_B)$.
- מצא את שיעור ה- x של שתי הנקודות אם ידוע כי המשיקים לגרפים של הפונקציות בנקודות אלו מקבילים.

(31) נתונה שתי הפונקציות הבאות: $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, $g(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- א. קבע אילו מהמשפטים הבאים נכונים ואלו שגויים.
 נמק זאת ע"י חישוב מתאים ותקן במשפטים השגויים את הטעות.
- לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה.
 - לשתי הפונקציות יש נקודת קיצון מאותו סוג ובעלות שיעור x זהה.
 - לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה זהים.
 - לשתי הפונקציות יש אסימפטוטות אנכיות.
- ב. בוחרים באקראי שתי נקודות, אחת על כל גרף, כך ששיעור ה- x שלהן זהה. הוכח כי מכפלת שיעורי ה- y של כל זוג נקודות כאלו שווה ל-1.

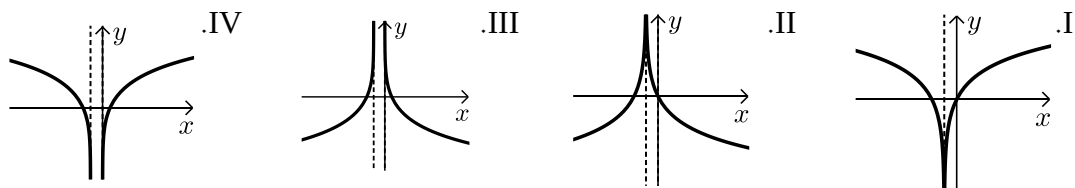
(32) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \ln(x^2 - 6x - 7)$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. מהן האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לציר ה- y ?
 ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ד. לפניך 4 גרפים: I, II, III, ו-IV. איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.



(33) נתונה הפונקציה: $y = \ln(x^2 + 2x + 1)$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. מהי האסימפטוטה של הפונקציה המקבילה לציר ה- y ?
 ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ד. לפניך 4 גרפים: I, II, III, ו-IV. איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.



- ה. העזר בגרף שבחרת וכתוב את תחומי השליליות של הפונקציה.

34) לפניך הפונקציה הבאה : $f(x) = \ln(1 - \ln x)$.

- מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
- הוכח כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

35) נתונה הפונקציה הבאה : $y = \ln \frac{2x+1}{x-1}$.

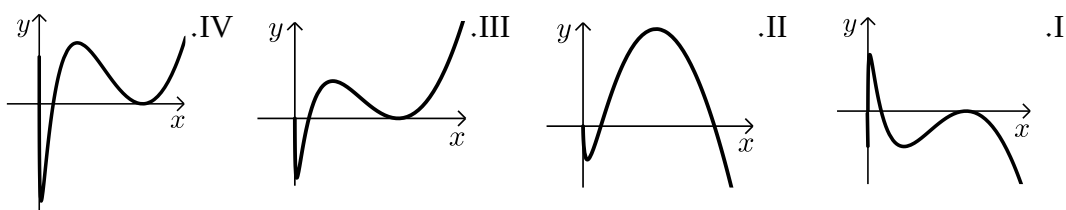
- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- הראה כי גרף הפונקציה יורד בכל תחום הגדרתו.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

36) נתונה הפונקציה הבאה : $f(x) = x(\ln^3 x + 2\ln^2 x)$.

- הראה כי נגזרת הפונקציה היא : $f'(x) = \ln^3 x + 5\ln^2 x + 4\ln x$.
- מצא את התחום בו הפונקציה עולה.
- ענה על השאלות הבאות :

- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- מצא את התחום בו הפונקציה חיובית.

ד. לפניך 4 גרפים. קבע איזה מהם מתאר את הפונקציה $f(x)$ ונמק את בחירתך.



37) נתונה הפונקציה : $f(x) = \ln^3 x - 3\ln x$.

- מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הפונקציה $g(x) = \ln x$.

(38) ענה על הסעיפים הבאים :

א. פתור את המשוואה הבאה : $\ln(x+e) - \ln(x\sqrt{e}) = \ln 2 - 0.5$

נתונה הפונקציה : $f(x) = \ln(x+e) - \ln(x\sqrt{e})$

ב. הראה כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה : $x=e$.

(39) נתונה הפונקציה הבאה : $y = \frac{x+a}{\ln(x+a)}$, a פרמטר חיובי, $a \neq 1$

א. הבע באמצעות a את :

i. תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. הנקודה המקיימת $y' = 0$.

iii. נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

iv. האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.

ב. ידוע כי גרף הפונקציה עולה רק בתחום : $x > e-2$. מצא את a .

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום $x > -1$.

ד. נתון הישר : $y = k$. מצא בסקיצה את תחום הערכים של k עבורו לישר ולגרף הפונקציה לא תהיה אף נקודה משותפת.

(40) נתונה הפונקציה הבאה : $y = \ln x + \frac{1}{x}$

א. ענה על הסעיפים הבאים :

i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ii. יש לגרף הפונקציה אסימפטוטה מקבילה לציר y ?

אם כן מצא אותה.

ב. מצא את נקודת הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגה.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של גרף הפונקציה.

תשובות סופיות:

$$(11) \quad \text{א. } x > 0 \quad \text{ב. } x \neq 0 \quad \text{ג. } x > 10 \text{ או } x < -2 \quad \text{ד. } x > \ln 4$$

$$\text{ה. } 0 < x \neq e \quad \text{ו. } x > 0 \text{ וגם } x \neq e^3, e^{-1} \quad \text{ז. } x \geq e$$

$$(12) \quad \max(1, -1)$$

$$(13) \quad \min\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right)$$

$$(14) \quad \min(\sqrt{e}, 0) \text{ קצה, } \max\left(e, \frac{1}{e}\right)$$

$$(15) \quad \min(4, -1)$$

$$(16) \quad a = 1, b = -1$$

$$(17) \quad a = 1, b = -1$$

$$(18) \quad x = 3$$

$$(19) \quad \text{נקודת אי הגדרה } (0, 0), x = e, y = 0$$

$$(20) \quad \text{נקודת אי הגדרה } (0, 2), x = \frac{1}{e}, y = 2$$

$$(21) \quad \text{נקודת אי הגדרה } \left(e^2, \frac{1}{4}\right), (0, 0); x = \frac{1}{e^2}, y = 0$$

$$(22) \quad x = 0, y = 0$$

$$(23) \quad \text{נקודת אי הגדרה } (0, 0)$$

$$(24) \quad \text{נקודת אי הגדרה } (0, 2)$$

$$(25) \quad \left(\sqrt{e^3}, \frac{3}{2\sqrt{e^3}}\right)$$

$$(26) \quad \text{א. i. } x > 0 \quad \text{iii. } \max(1, -3.5), \min(3, \ln 27 - 7.5)$$

$$\text{iv. עולה: } 0 < x < 1, x > 3 \quad \text{יורדת: } 1 < x < 3 \quad \text{ב. i. } x > 0 \quad \text{ii. } (1, 0)$$

$$\text{iii. } \min(e^{-1}, -e^{-1}) \quad \text{iv. עולה: } x > e^{-1} \quad \text{יורדת: } 0 < x < e^{-1}$$

$$\text{ג. i. } x > 0 \quad \text{ii. } (e, 0) \quad \text{iii. } \min(1, -1) \quad \text{iv. עולה: } x > 1 \quad \text{יורדת: } 0 < x < 1$$

$$\text{ד. i. } x > 0 \quad \text{ii. } (1, 0) \quad \text{iii. } \min\left(e^{-2}, -\frac{2}{e}\right) \quad \text{iv. עולה: } x > e^{-2} \quad \text{יורדת: } 0 < x < e^{-2}$$

ה. i. $x > 0$ ii. $(1, 0)$ iii. $\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right)$ iv. עולה: $x > \frac{1}{\sqrt{e}}$ יורדת: $0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}}$

ו. i. כל x ii. $(0, 0)$ iii. $\min(0, 0)$ iv. עולה: $x > 0$ יורדת: $x < 0$

(27) א. $x > 0$ ב. $\max\left(\frac{1}{e^2}, \frac{8}{e^2}\right), \min(1, 0)$

ג. עלייה: $x > 1$ או $0 < x < \frac{1}{e^2}$, ירידה: $\frac{1}{e^2} < x < 1$ ד. $(1, 0)$

(28) א. $0 < x \neq e$ ב. $\min(e^2, e^2)$ ג. עלייה: $x > e^2$, ירידה: $0 < x < e^2$

ו. $k > e^2$ ד. אין

(29) א. $x > 0$ ב. $\min(4, -1)$ ג. עלייה: $x > 4$, ירידה: $0 < x < 4$

ד. $(1, 0)$, $(16, 0)$

(30) א. $x \geq 1$ ב. מתקבל: $f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} > 0$ ג. $(e, 1)$, $(1, 0)$

ד. $x = \sqrt[4]{e}$

(31) א. i. לא נכון. תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא: $x > 0, x \neq 1$ ותחום ההגדרה של $g(x)$ הוא: $x > 0$

ii. לא נכון. לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה $x = e$ אך עבור $f(x)$ מדובר במינימום ועבור $g(x)$ מדובר במקסימום.

iii. לא נכון. עבור $f(x)$: עולה: $x > e$ יורדת: $0 < x < e, x \neq 1$

ועבור $g(x)$: עולה: $0 < x < e$ יורדת: $x > e$ iv. נכון.

ב. לגבי כל נקודה נאמר כי שיעור ה- y שלה הוא: $y = \frac{x}{\ln x}$ ו- $y = \frac{\ln x}{x}$

נכפול: $y = \frac{x}{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{x} = 1$

(32) א. $x < -1, x > 7$ ב. $x = -1, 7$ ג. עולה: $x > 7$ יורדת: $x < -1$

ד. III. הסבר: באיורים I ו-II גרף הפונקציה לא בתחום. באיור IV תחומי העלייה והירידה הפוכים.

(33) א. $x \neq -1$ ב. $x = -1$ ג. עולה: $x > -1$ יורדת: $x < -1$

ד. I. הסבר: באיור II תחומי העלייה והירידה הפוכים.

באיורים III ו-IV יש אסימפטוטה מיותרת. ה. $x \neq -1, -2 < x < 0$

(34) א. $0 < x < e$. (שימו לב כי תנאי ת.ה. הם: $1 - \ln x > 0$ וגם $x > 0$).

ב. $f'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{1 - \ln x} = -\frac{1}{x(1 - \ln x)} < 0$. ולכן הפונקציה יורדת בת.ה.
ג. $(1, 0)$.

(35) א. $x < -\frac{1}{2}, x > 1$. ב. $x = -\frac{1}{2}, 1$. ג. $(-2, 0)$.

ד. מתקבל: $y' = \frac{-3}{(2x+1)(x-1)} < 0$.

(36) ב. $x > 1, e^{-4} < x < e^{-1}$.

ג. i. 2 נקודות והן: $(e^{-2}, 0)$, $(1, 0)$. הנקודה שבה: $x = 0$ לא קיימת עקב ת.ה.

ii. $x \neq 1, x > e^{-2}$. ד. III – בראשית הצירים יש חור ולא אסימפטוטה. שאר הנתונים כפי שהתקבלו בסעיפים הקודמים.

(37) א. $x > 0$. ב. $(e^{\sqrt{3}}, 0)$, $(e^{-\sqrt{3}}, 0)$, $(1, 0)$. ג. $\min(e, -2)$, $\max(e^{-1}, 2)$.
ה. $(e^2, 2)$, $(e^{-2}, -2)$, $(1, 0)$.

(38) א. $x = e$. ב. מתקבל: $y' = \frac{-e}{x(x+e)} < 0$. ג. $y = -\frac{1}{2e}x + \ln 2$.

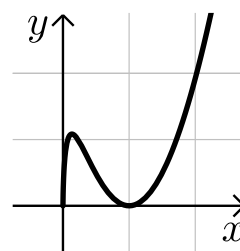
(39) א. i. $x > -a, x \neq 1-a$. ii. $(e-a, e)$. iii. $\left(0, \frac{a}{\ln a}\right)$.

iv. $x = 1-a$. ב. $a = 2$. ד. $k < e$.

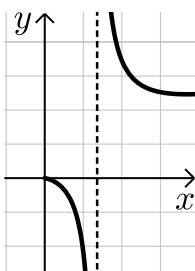
(40) א. i. $x > 0$. ii. $x = 0$. ב. $\min(1, 1)$. ג. עולה: $x > 1$, יורדת: $0 < x < 1$.

סקיצות לשאלות:

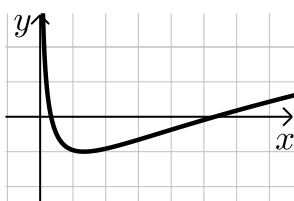
(27)



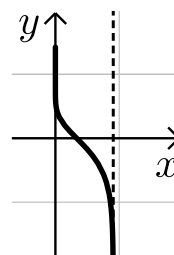
(28)



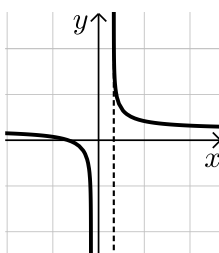
(29)



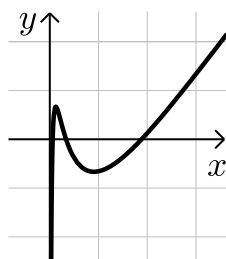
(34)



(35)



(37)



(39)

